1 Contrôle des connaissances 2016/2017

Remarque préliminaire

Le contrôle se compose de deux problèmes qui sont indépendants l'un de l'autre. Le premier problème compte pour 60% de la note, et le second pour 40%.

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible. Ainsi,

- lors de l'écriture des problèmes et sous-problèmes d'optimisation issus de la décomposition et coordination, on précisera les variables par rapport auxquelles se fait l'optimisation,
- à chaque itération k des algorithmes que l'on sera amené à écrire, on distinguera clairement entre les variables à optimiser et les variables qui sont figées à cette itération ; ces dernières seront repérées par un indice supérieur $^{(k)}$ (comme dans le cours).

Il est bien sûr conseillé de lire entièrement et attentivement les énoncés des problèmes...

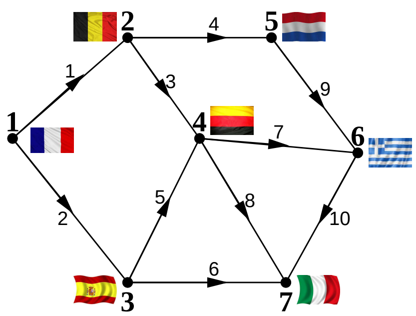
Premier problème : production-transport sur la plaque Europe.

Formulation compacte du problème.

On modélise le système de production-transport d'électricité à l'échelle européenne par un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathcal{N})$, où chaque pays est représenté par un nœud $n \in \mathcal{N}$ du graphe, et où chaque arc $a \in \mathcal{A}$ du graphe permet d'échanger de l'énergie entre les deux pays situés aux extrémités de l'arc. On suppose le graphe $\mathcal{G}$ connexe et on note A la matrice d'incidence nœud–arc associée à $\mathcal{G}$:

$$A_{n,a} = \begin{cases} -1 & \text{si le nœud } n \text{ est l'origine de l'arc } a, \\ +1 & \text{si le nœud } n \text{ est l'extrémité de l'arc } a, \\ \ \ 0 & \text{sinon.} \end{cases} .$$

Ainsi, dans chaque colonne de la matrice A, les valeurs -1 et $+1$ apparaissent une fois et une seule, de telle sorte que la somme des lignes de la matrice A est identiquement nulle.



$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

Figure 1: Graphe et matrice d'incidence associée

On note q le vecteur des flux d'énergie transitant sur les arcs du graphe et f le vecteur des énergies importées ou exportées par chaque pays :

$$q = (q_a)_{a \in \mathcal{A}} \qquad , \qquad f = (f_n)_{n \in \mathcal{N}} .$$

À chaque nœud n du graphe, on a un problème d'équilibrage de la production et de la demande qui prend en compte les ressources internes et la consommation du pays associé au nœud n, ainsi que l'énergie d'import/export f_n. Le coût associé, qui résulte d'une optimisation ne dépendant que des variables attachées au nœud n, peut être vu comme une fonction du vecteur f_n et est noté $J_P^n(f_n)$, de telle sorte que le coût total de production est :

$$J_P(f) = \sum_{n \in \mathcal{N}} J_P^n(f_n) \ . \tag{1}$$

À la quantité d'énergie q_a qui transite sur chaque arc a du graphe est associé un coût de transport noté $J_T^a(q_a)$, et on suppose que la fonction J_T^a est quadratique, fortement convexe. Le coût total de transport sur l'ensemble du graphe est donc :

$$J_T(q) = \sum_{a \in \mathcal{A}} J_T^a(q_a) \ . \tag{2}$$

Enfin, les échanges d'énergie sur le graphe sont soumis à la première loi de Kirchhoff (qui stipule que la somme des débits entrant et sortant aux nœuds du graphe est nulle) et on a donc :

$$Aq - f = 0 \ . \tag{3}$$

En résumé, le problème de production-transport sur la plaque Europe s'écrit de manière compacte :

$$\min_{q,f} J_P(f) + J_T(q) \ , \tag{4a}$$

$$\text{sous :} \quad Aq - f = 0 \ . \tag{4b}$$

Dans toute la première partie du problème, on limitera l'étude du problème à cette formulation (4).

Remarque 1. On remarquera que la structure de la matrice A, et plus précisément le fait que la somme des lignes de cette matrice soit identiquement nulle, est telle que l'équation (3) implique la relation :

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} f_n = 0 \ . \tag{5}$$

Les équations d'équilibre (3) peuvent alors s'écrire de manière équivalente sous la forme de deux équations, à savoir $\sum_{n \in \mathcal{N}} f_n = 0$ et $\widetilde{A}q - \widetilde{f} = 0$, où la matrice $\widetilde{A}$ et le vecteur $\widetilde{f}$ sont obtenus en supprimant une ligne quelconque de la matrice A ainsi que la composante correspondante du vecteur f. Sous l'hypothèse "graphe connexe", la matrice $\widetilde{A}$ est de plein rang. □

Question 1 — *Décomposition par les prix.*

1.a Appliquer l'algorithme de décomposition par les prix au problème (4) : écrire le sous-problème associé à la production, celui associé au transport, ainsi que l'étape de coordination.

1.b Préciser les hypothèses à satisfaire pour que cet algorithme converge vers une solution du problème (4).

Question 2 — *Décomposition par allocation de ressources.*

2.a Appliquer de manière directe l'algorithme de décomposition par allocation de ressources au problème (4) : écrire le sous-problème associé à la production, celui associé au transport, ainsi que l'étape de coordination.

2.b En s'appuyant sur la remarque 1, montrer que l'ensemble admissible du sous-problème associé au transport peut être vide et donc que l'algorithme peut se bloquer.

2.c Proposer une modification de l'algorithme permettant de contourner la difficulté soulevée à la question **2.b**.

Question 3 — *Décomposition par prédiction.*

3.a Appliquer l'algorithme de décomposition par prédiction de type point-fixe au problème (4) en attribuant la contrainte couplante (4b) au sous-problème associé au transport ; écrire le sous-problème associé à la production, le sous-problème associé au transport ainsi que l'étape de coordination, et discuter de l'admissibilité([1]) de ce dernier sous-problème.

3.b Appliquer l'algorithme de décomposition par prédiction de type point-fixe au problème (4) en attribuant la contrainte couplante (4b) au sous-problème associé à la production ; écrire le sous-problème associé à la production, celui associé au transport, l'étape de coordination et discuter de l'admissibilité de ces deux sous-problèmes.

Question 4 — *Utilisation du Principe du Problème Auxiliaire.*

Le problème (4) s'écrit, en utilisant la contrainte pour exprimer le vecteur f, sous la forme équivalente :

$$\min_{q} J_P(Aq) + J_T(q) \ . \tag{6}$$

4.a Appliquer le Principe du Problème Auxiliaire au problème (6) avec les choix suivants :([2])

$$J(q) = J_P(Aq) + J_T(q) \quad ; \quad J^{\Sigma}(q) = 0 \quad ; \quad K^{(k)}(q) = J_T(q) \ \text{ et } \ \epsilon^{(k)} > 0 \quad \forall k \ .$$

4.b Donner les hypothèses à satisfaire pour que l'algorithme associé à cette application du PPA converge vers une solution du problème (6).

4.c Discuter de la possibilité de pouvoir choisir les coefficients $\epsilon^{(k)}$ tous égaux à la valeur 1. Avec ce choix, écrire l'algorithme du PPA dans ce cas et indiquer (en justifiant votre réponse) à quel algorithme il s'identifie parmi ceux vus aux questions précédentes (prix, allocation, prédiction).

Formulation détaillée des sous-problèmes.

En fait, le problème de production-transport sur la plaque européenne a une dimension temporelle que l'on doit prendre en compte. Ce problème est en effet posé sur un horizon d'optimisation discret $\mathcal{T} = \{1, 2, \ldots, \tau\}$, chaque composante q_a du vecteur q et chaque composante f_n du vecteur f correspondant en fait à un vecteur indexé par le temps :

$$q_a = \big(q_{a,1}, \ldots, q_{a,\tau}\big) \in \mathbb{R}^{\tau} \qquad , \qquad f_n = \big(f_{n,1}, \ldots, f_{n,\tau}\big) \in \mathbb{R}^{\tau} \ .$$

Notant $q_t = (q_{a,t})_{a \in \mathcal{A}}$ et $f_t = (f_{n,t})_{n \in \mathcal{N}}$ les vecteurs associés à l'instant t d'une part aux échanges d'énergie sur les arcs du graphe et d'autre part aux imports/exports aux nœuds du graphe, la contrainte (3) prend alors la forme suivante :

$$Aq_t - f_t = 0 \qquad \forall t \in \mathcal{T} \ . \tag{7}$$

Remarque 2. On notera que, dans l'expression compacte du problème de production-transport, le vecteur q des échanges sur les arcs du graphe (respectivement le vecteur f des imports/exports aux nœuds du graphe) est en fait une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre d'arcs du graphe (respectivement le nombre de nœuds du graphe) et dont le nombre de colonnes est égal au nombre τ de pas de temps dans l'horizon $\mathcal{T}$. L'équation (3) correspond dont à une *égalité matricielle*, qui s'écrit de manière équivalente sous la forme des τ *égalités vectorielles* (7). □

[1] c'est à dire de la possibilité que l'ensemble admissible soit ou non vide

[2] voir le cours pour la signification des notations J, J^{Σ}, $K^{(k)}$ et $\epsilon^{(k)}$

Le coût de transport J_T^a est une fonction additive du temps :

$$J_T^a(q_a) = \sum_{t \in \mathcal{T}} \varphi_{a,t}(q_{a,t}) \ , \tag{8}$$

avec $\varphi_{a,t} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quadratique : $\varphi_{a,t}(q_{a,t}) = \frac{1}{2}\alpha_{a,t}\big(q_{a,t}\big)^2$ avec $\alpha_{a,t} > 0$.

Le coût de production du nœud n résulte quant à lui d'une optimisation mettant en jeu un système dynamique (donnant l'évolution au cours du temps du stock d'énergie $x_{n,t}$ disponible au nœud n et au pas de temps t). Cette optimisation interne à chaque nœud n se fait par rapport aux variables de production interne du nœud $(u_{n,1}, \ldots, u_{n,\tau})$ et dépend des quantités d'énergie $(f_{n,1}, \ldots, f_{n,\tau})$ en provenance des autres nœuds du graphe ; elle s'écrit comme la valeur d'un problème de commande optimale en temps discret :

$$J_P^n(f_n) = \min_{u_{n,1},\ldots,u_{n,\tau}} \sum_{t \in \mathcal{T}} C_{n,t}(x_{n,t-1}, u_{n,t}, f_{n,t}) \ , \tag{9a}$$

$$\text{sous} \quad x_{n,t} = g_{n,t}(x_{n,t-1}, u_{n,t}, f_{n,t}) \ , \quad x_{n,0} \text{ donné} \ , \tag{9b}$$

$$\text{avec} \quad x_{n,t} \in [\underline{x}_n, \overline{x}_n] \quad \forall t \in \mathcal{T} \ . \tag{9c}$$

Question 5 — *Sous-problèmes "prix".*

5.a En partant de la formulation du sous-problème associé au transport obtenue à la question **1.a**, écrire de manière détaillée ce sous-problème en y incorporant la dimension temporelle ; montrer que ce sous-problème se décompose lui-même arc par arc et pas de temps par pas de temps et donner la solution explicite de chacun des sous-problèmes élémentaires ainsi obtenus.

5.b En partant de la formulation du sous-problème associé à la production obtenue à la question **1.a**, écrire de manière détaillée ce sous-problème en y incorporant la dimension temporelle ; montrer que ce sous-problème se décompose lui-même nœud par nœud, donner l'expression complète du sous-problème au nœud n et écrire les équations de la Programmation Dynamique permettant de résoudre ce sous-problème élémentaire.

Question 6 — *Sous-problèmes "allocation".*

6.a En partant de la formulation du sous-problème associé au transport obtenue à la question **2.a**, écrire de manière détaillée ce sous-problème en y incorporant la dimension temporelle ; montrer que ce sous-problème se décompose pas de temps par pas de temps et donner la solution explicite de chacun des sous-problèmes élémentaires ainsi obtenus.

6.b En partant de la formulation du sous-problème associé à la production obtenue à la question **2.a**, écrire de manière détaillée ce sous-problème en y incorporant la dimension temporelle ; montrer que ce sous-problème se décompose nœud par nœud, donner l'expression du sous-problème au nœud n et écrire les équations de la Programmation Dynamique permettant de résoudre chacun des sous-problèmes élémentaires ainsi obtenus.

Deuxième problème : microgrid pour un écoquartier.

Formulation du problème.

On considère un quartier urbain constitué de 3 maisons, dont la consommation en énergie pour le chauffage et l'eau chaude sanitaire est assurée par le biais d'une batterie elle même alimentée par des moyens de production de type EnR (photovoltaïque, éolien) avec une connexion de secours au réseau de distribution classique.

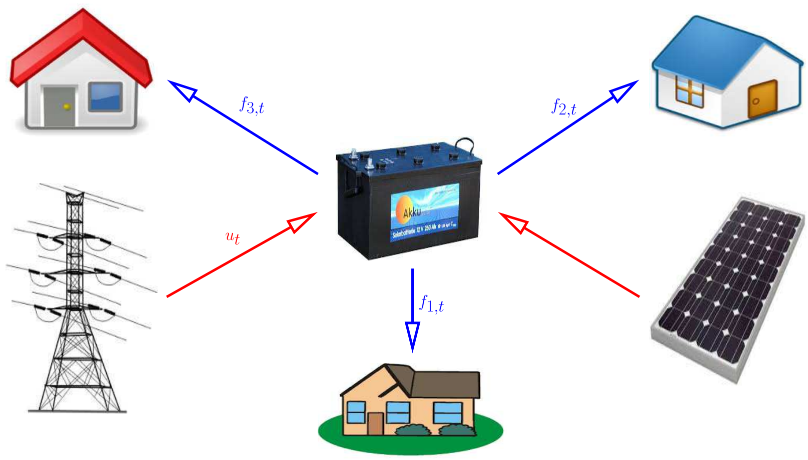


Figure 2: Écoquartier : maisons connectées, stockage et alimentation

On s'intéresse à la gestion optimale de cet écoquatier sur un horizon temporel discret $\{0, 1, \ldots, T\}$.

- Chaque maison i est caractérisée au pas de temps t par son état thermique $y_{i,t}$, qui, partant d'un état $y_{i,0}$ donné, évolue au cours du temps suivant l'équation :
$$y_{i,t+1} = g^m_{i,t}(y_{i,t}, f_{i,t}) \ , \quad t = 0, \ldots, T-1 \ ,$$
$f_{i,t}$ représentant l'énergie fournie à la maison i par la batterie. Le coût de confort thermique associé au pas de temps t incorpore les besoins en chauffage et en eau chaude et est noté $C^m_{i,t}(y_{i,t})$.

- L'évolution au cours du temps de l'état de charge x_t de la batterie est donnée par l'équation :
$$x_{t+1} = g^b_t\Big(x_t, u_t, \sum_{i=1}^{3} f_{i,t}\Big) \ , \quad t = 0, \ldots, T-1 \ ,$$
où l'état initial x_0 est supposé connu et où u_t représente la quantité d'énergie que l'on achète en provenance du réseau de distribution classique.([3]) L'état x_t de la batterie est contraint à rester entre les bornes $\underline{x}$ et $\overline{x}$. Le coût associé au pas de temps t, qui prend en compte le prix de l'énergie du réseau et les caractéristiques de la batterie, est noté $C^b_t(x_t, u_t)$. On y ajoute un terme de coût final $C^b_T(x_T)$ pour inciter la batterie à rester dans un état raisonnable à la fin de l'horizon d'optimisation.

Afin de disposer d'une structure additive permettant de décomposer le problème, on introduit la quantité totale f_t d'énergie fournie par la batterie aux maisons :
$$f_t = \sum_{i=1}^{3} f_{i,t} \ .$$

[3] Les apports en énergie renouvelable (EnR) sont pris en compte dans la forme de la fonction g^b_t.

Le problème d'optimisation de la gestion de l'écoquartier s'écrit alors :

$$\min_{u,f,f_1,f_2,f_3} \left(\sum_{t=0}^{T-1} C_t^b(x_t, u_t) + C_T^b(x_T) \ + \ \sum_{t=0}^{T} \left(C_{1,t}^m(y_{1,t}) + C_{2,t}^m(y_{2,t}) + C_{3,t}^m(y_{3,t}) \right) \right) \tag{10a}$$

sous les contraintes :

$$y_{1,t+1} = g_{1,t}^m(y_{1,t}, f_{1,t}) \quad , \quad t = 0, \dots, T-1 \ , \tag{10b}$$

$$y_{2,t+1} = g_{2,t}^m(y_{2,t}, f_{2,t}) \quad , \quad t = 0, \dots, T-1 \ , \tag{10c}$$

$$y_{3,t+1} = g_{3,t}^m(y_{3,t}, f_{3,t}) \quad , \quad t = 0, \dots, T-1 \ , \tag{10d}$$

$$x_{t+1} = g_t^b(x_t, u_t, f_t) \quad , \quad t = 0, \dots, T-1 \ , \tag{10e}$$

$$x_t \in [\underline{x}, \overline{x}] \quad , \quad t = 1, \dots, T \ , \tag{10f}$$

$$f_{i,t} + f_{2,t} + f_{3,t} - f_t = 0 \quad , \quad t = 0, \dots, T-1 \ . \tag{10g}$$

On cherche à résoudre ce problème par des méthodes de décomposition/coordination de telle sorte que l'on obtienne un sous-problème associé à la gestion de la batterie et un sous-problème associé à chacune des maisons. Dans cette optique, les **seules contraintes couplantes** du problème sont les contraintes (10g), les autres contraintes étant considérées comme locales et propres aux différents sous-problèmes.

Question 0 — *Résolution du problème global.*

Discuter de la possibilité de résoudre ce problème par la programmation dynamique : détailler la dimension de l'état associé au problème (10), le calcul des fonctions de Bellman et les conséquences de la malédiction de la dimension pour ce problème.

Dans la suite, on supposera que l'on dispose d'un code de résolution efficace pour un problème de commande optimale en dimension 1 (c'est à dire comportant une variable d'état scalaire).

Question 1 — *Décomposition par les prix.*

1.a Écrire de manière détaillée les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme de décomposition par les prix([4]) ainsi que l'étape de remise à jour des multiplicateurs.

1.b Indiquer pourquoi les sous-problèmes apparaissant dans cette méthode peuvent être résolus de manière effecive par la Programmation Dynamique.

Question 2 — *Décomposition par allocation de ressources.*

2.a Écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme de décomposition par allocation et vérifier que ces sous-problèmes peuvent être résolus de manière effective par la programmation dynamique.

2.b Détailler la manière dont sont calculés les multiplicateurs associés aux contraintes d'allocation et écrire l'étape de remise à jour de l'allocation. Discuter des risques de blocage de cet algorithme.

Question 3 — *Décomposition par prédiction.*

3.a Choisir à quel sous-système affecter les contraintes (10g) et justifier ce choix.

3.b Écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme de décomposition par prédiction induit par le choix précédent.

[4] seules les contraintes (10g) sont dualisées...