1 Contrôle des connaissances 2017/2018

Remarque préliminaire

Le contrôle se compose de deux problèmes qui sont indépendants l'un de l'autre. Le premier problème compte pour 60% de la note, et le second pour 40%. Le second problème est (peut-être) un peu plus facile que le premier...

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible. Ainsi,

- lors de l'écriture des problèmes et sous-problèmes d'optimisation issus de la décomposition et coordination, on précisera toujours les variables par rapport auxquelles se fait l'optimisation,
- à chaque itération k des algorithmes que l'on sera amené à écrire, on distinguera clairement entre les variables à optimiser et les variables qui sont figées à cette itération : ces dernières seront repérées par un indice supérieur $^{(k)}$ (comme dans le cours).

Il est bien sûr fortement conseillé de lire entièrement et attentivement les énoncés des problèmes...

Premier problème : centre de production et unités de vente.

Première formulation du problème.

On considère un centre de production unique (que l'on appellera unité 0) fournissant N dépôts de vente (que l'on appellera unités 1 à N).

- L'unité 0 contrôle une production u_0 correspondant à p biens ; cette production u_0 est contrainte à appartenir à un sous-ensemble $\mathcal{U}_0^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{R}^p$ et engendre un coût noté $J_0(u_0)$. On suppose que le sous-ensemble $\mathcal{U}_0^{\mathrm{ad}}$ est *convexe fermé non vide* et que la fonction J_0 est définie sur tout l'espace $\mathbb{R}^p$, *fortement convexe* et différentiable à gradient Lipschitzien.
- Chaque unité i, pour $i = 1, \ldots, N$, peut passer un ordre de vente pour une quantité u_i des p biens produits ; cette vente u_i est contrainte à appartenir à un sous-ensemble $\mathcal{U}_i^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{R}^p$ et engendre un coût noté $J_i(u_i)$ (c'est en fait l'opposé du gain induit par la vente). On suppose que le sous-ensemble $\mathcal{U}_i^{\mathrm{ad}}$ est *convexe fermé non vide* et que la fonction J_i est définie sur tout l'espace $\mathbb{R}^p$, *fortement convexe* et différentiable.

Quand l'unité i passe un ordre de vente u_i, elle ne peut en réaliser qu'une partie notée $\Theta_i(u_i)$. Chaque application Θ_i est *linéaire* et correspond à une matrice de dimension p effectuant une sélection parmi les p biens. C'est donc une matrice ne comportant des éléments non nuls que sur la diagonale : si le bien j n'est pas disponible à la vente par l'unité i, le j-ème élément de la diagonale de la matrice Θ_i est égal à 0, et il est égal à 1 dans le cas contraire. L'équilibre production-vente dans $\mathbb{R}^p$ du système global s'écrit dans ces conditions :

$$u_0 = \sum_{i=1}^{N} \Theta_i(u_i) \; . \tag{1}$$

Enfin l'ordre de vente de chaque unité i est limité par la production de l'unité 0, ce qui se traduit pour chaque $i \in \{1, \ldots, N\}$ par les contraintes

$$u_i \leq \varphi_i(u_0) \; . \tag{2}$$

On supposera que chaque fonction $\varphi_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ est *linéaire.*

Le but du problème est de minimiser la somme de tous les coûts de ce système de production-vente, tout en respectant l'ensemble des contraintes qui y sont attachées.

Question 0 — *Écriture du problème d'optimisation.*

0.a Écrire le problème d'optimisation correspondant à ce système de production-vente (on écrira les contraintes de telle sorte qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur le signe des multiplicateurs associés).

0.b Identifier les contraintes qui créent des couplages entre les unités (de 0 à N) dans ce problème. Préciser en quoi les hypothèses faites lors de la description du problème permettent d'assurer que le Lagrangien obtenu en dualisant les contraintes couplantes admet un point-selle.

Décomposition dans le cadre additif.

On souhaite effectuer une décomposition du problème unité par unité (ce qui conduit donc à considérer $(N+1)$ sous-problèmes). On tiendra compte du fait que la relation (2) définit N contraintes de type **inégalité**.

Question 1 — *Décomposition par les prix.*

1.a Appliquer l'algorithme de décomposition par les prix au problème d'optimisation associé au système de production-vente : écrire le sous-problème associé à chacune des unités, ainsi que l'étape de coordination.

1.b Dire précisément en quoi les hypothèses effectuées permettent d'assurer que cet algorithme converge vers une solution du problème de départ.

Question 2 — *Décomposition par allocation de ressources.*

2.a Appliquer de manière directe([1]) l'algorithme de décomposition par allocation de ressources : écrire le sous-problème associé à chacune des unités, ainsi que l'étape de coordination.

2.b Pour chaque sous-problème, étudier l'ensemble admissible sur lequel il est formulé. Dans quelles conditions cet algorithme par allocation peut-il se bloquer ?

Question 3 — *Décomposition par prédiction.*

3.a Appliquer l'algorithme de décomposition par prédiction de type point-fixe au problème associé au système de production-vente en attribuant

- la contrainte (1) au sous-problème associé à l'unité 0,
- la i-ème contrainte (2) au sous-problème associé à l'unité i, pour i variant de 1 à N ;

écrire le sous-problème associé à chacune des unités ainsi que l'étape de coordination, et discuter des propriétés de l'ensemble admissible de chacun de ces sous-problèmes.

3.b Montrer que la solution obtenue à une itération donnée de l'algorithme de décomposition n'est pas admissible (au sens où elle ne respecte pas l'ensemble des contraintes du problème de départ). Est-il possible de modifier l'algorithme afin de le rendre admissible à chaque itération ?

---
[1] c'est-à-dire comme cela a été fait dans le cours

Décomposition dans le cas général.

On apporte certaines modifications à la formulation initiale du problème de production-vente.

1. On commence par **supprimer** les contraintes (2) présentes dans la première formulation du problème, et on suppose que l'ensemble admissible $\mathcal{U}_0^{\mathrm{ad}}$ est égal à $\mathbb{R}^p$ tout entier : la fonction de coût à minimiser est donc inchangée, mais la seule contrainte couplante restant dans cette seconde formulation est la contrainte (1). Le nouveau problème résultant de cette modification est appelé **deuxième formulation**.

2. Puis, partant de cette deuxième formulation, on décide d'ajouter un terme **supplémentaire** de coût([2]) de la forme
$$\Phi(u_0, u_1, \dots, u_N) \ , \tag{3}$$
qu'il faut donc ajouter au coût $J_0(u_0)$ du centre de production et aux coûts $J_i(u_i)$ des unités de vente. On introduit ainsi un nouveau couplage entre les unités du problème. Ce nouveau problème est appelé **troisième formulation**.

On souhaite toujours effectuer la décomposition du problème selon les unités, mais en utilisant dorénavant le Principe du Problème Auxiliaire (PPA).

Question 4 — *Utilisation du PPA dans la* ***deuxième formulation****.*

4.a Écrire le problème d'optimisation correspondant à la *deuxième formulation*, en remplaçant dans la fonction de coût J_0 la variable u_0 par son expression donnée par la relation (1).

4.b Écrire les sous-problèmes obtenus par application du PPA à ce problème avec les choix :([3])

$$K^{(k)}(u) = \sum_{i=1}^{N} J_0\Big(\Theta_i(u_i) + \sum_{j\neq i} \Theta_j(u_j^{(k)})\Big) \ , \quad J^{\Sigma}(u) = \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) \quad \text{et} \quad \epsilon^{(k)} \equiv 1 \ .$$

4.c Écrire les sous-problèmes obtenus par application du PPA à ce problème avec les choix :

$$K^{(k)}(u) = \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) \ , \quad J^{\Sigma}(u) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \epsilon^{(k)} \equiv 1 \ .$$

4.d Déterminer si les hypothèses faites permettent d'assurer que les algorithmes associés à ces applications du PPA convergent vers une solution du problème. Discuter des conditions permettant de choisir dans les questions **4.b** et **4.c** les coefficients $\epsilon^{(k)}$ identiquement égaux à la valeur 1, et proposer un moyen de le faire quand ces conditions ne sont pas remplies.

Question 5 — *Utilisation du PPA dans la* ***troisième formulation****.*

5.a Écrire le problème d'optimisation correspondant à la *troisième formulation*, en remplaçant la variable u_0 par son expression donnée par la relation (1) dans tous les termes de coût où elle apparaît.

5.b Écrire les sous-problèmes obtenus par application du PPA à ce problème avec les choix :

$$K^{(k)}(u) = \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i) \quad , \quad J^{\Sigma}(u) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \epsilon^{(k)} \equiv 1 \ .$$

[2]que l'on pourrait interpréter comme un terme de pénalisation remplaçant les contraintes (2)...
[3]Voir les notes de cours sur le PPA pour la signification des notations $K^{(k)}$, J^{Σ} et $\epsilon^{(k)}$.

Deuxième problème : optimisation en deux étapes.

Formulation générale du problème.

On considère un problème d'optimisation dans lequel on doit prendre des décisions en deux étapes consécutive.

- À la première étape du processus, une décision $x \in \mathbb{R}^n$ est prise, qui induit un coût noté :

$$F(x) \; . \tag{4a}$$

- Durant la deuxième étape du processus, on prend en compte simultanément 3 événements notés ω_1, ω_2 et ω_3 : pour chaque événement $\omega_i \in \mathbb{R}^p$, on prend une décision $y_i \in \mathbb{R}^m$, qui engendre un coût dépendant *a priori* de x, de y_i et de ω_i, et que l'on note :

$$G(x, y_i, \omega_i) \; . \tag{4b}$$

Sous sa forme la plus générale, le but du problème est de minimiser, par rapport aux variables $(x,\ y_1,\ y_2,\ y_3)$, la somme de tous les coûts décrits ci-dessus en respectant les 3 contraintes *linéaires* suivantes :

$$Tx + Ay_i - \omega_i = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \; . \tag{4c}$$

Question 0 — *Écriture du problème dans le cas général.*

0.a Écrire le problème d'optimisation associé à la formulation (4), et donner les conditions pour que ce problème admette au moins une solution.

Formulations spécifiques du problème.

En fait, on se contente d'étudier les deux situations spécifiques **S1** et **S2** suivantes.

S1 La fonction G dans le terme de coût (4b) **ne dépend pas** de la variable x et s'écrit donc :

$$G(y_i, \omega_i) \; . \tag{5}$$

Dans cette situation **S1**, le couplage entre les variables du problème provient uniquement des contraintes linéaires (4c)

S2 Les contraintes (4c) **ne dépendent pas** de la variable x et s'écrivent donc sous la forme :

$$Ay_i - \omega_i = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \; . \tag{6}$$

Dans cette situation **S2**, le couplage entre les variables du problème provient uniquement des termes de coût (4b).

On cherche à résoudre les problèmes d'optimisation associés à ces deux formulations spécifiques par des méthodes de décomposition/coordination, de telle sorte que l'on obtienne un sous-problème associé à chaque variable de décision $(x, y_1, \ldots, y_3)$, soit $1 + 3$ sous-problèmes.

Question 0 — *Écriture du problème dans les situations spécifiques.*

0.b Écrire le problème d'optimisation associé à la situation **S1**, et indiquer pourquoi les méthodes de décomposition/coordination par les prix, les quantités et par prédiction s'y appliquent.

0.c Écrire le problème d'optimisation associé à la situation **S2**, et préciser pourquoi le PPA permet d'effectuer la décomposition de ce problème.

Décomposition dans la situation **S1**.

On s'intéresse d'abord à la situation **S1** dans laquelle le couplage se fait par les contraintes.

Question 1 — *Décomposition par les prix.*

1.a Écrire de manière détaillée les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme de décomposition par les prix ainsi que l'étape de remise à jour des multiplicateurs.

Question 2 — *Décomposition par allocation de ressources.*

2.a Appliquer de manière directe([4]) l'algorithme de décomposition par allocation de ressources, et écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de cet algorithme ainsi que l'étape de coordination. Que dire des contraintes du sous-problème en x ?

2.b Dans l'esprit de la méthode par allocation, proposer un autre algorithme de décomposition se basant sur le fait que le problème se décompose naturellement suivant les variables $y_1, \ldots, y_3$ une fois la variable x fixée.

Question 3 — *Décomposition par prédiction.*

3.a Choisir à quel sous-système affecter chacune des contraintes et justifier ce choix.

3.b Écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme de décomposition par prédiction de type point-fixe induit par les choix précédents.

Décomposition dans la situation **S2**.

On s'intéresse ensuite à la situation **S2** dans laquelle le couplage se fait par le critère.

Question 4 — *Décomposition par le PPA.*

4.a Écrire les sous-problèmes obtenus par application du PPA à ce problème avec les choix :([5])

$$K^{(k)}(x,y) = F(x) + \sum_{i=1}^{3} G\big(x^{(k)}, y_i, \omega_i\big) \quad , \quad J^{\Sigma}(x,y) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \epsilon^{(k)} \equiv 1 \; .$$

4.b Écrire les sous-problèmes obtenus par application du PPA à ce problème avec les choix :

$$K^{(k)}(x,y) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \sum_{i=1}^{3} G\big(x^{(k)}, y_i, \omega_i\big) \quad , \quad J^{\Sigma}(x,y) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \epsilon^{(k)} \equiv 1 \; .$$

Question facultative.

On s'intéresse au cas où les contraintes (4c) (et par voie de conséquence (6)) correspondent à des *inégalités* :

$$Tx + Ay_i - \omega_i \leq 0 \qquad i = 1, 2, 3 \; .$$

Sans rentrer dans trop de détails, indiquer comment les algorithmes obtenus dans la situation **S1** précédente peuvent être adaptés pour tenir compte de cette modification. Quelle conséquence cette modification a-t-elle pour les algorithmes obtenus dans la situation **S2** ?

[4] c'est-à-dire comme cela a été fait dans le cours

[5] Voir les notes de cours sur le PPA pour la signification des notations $K^{(k)}$, J^{Σ} et $\epsilon^{(k)}$.