1 Contrôle des connaissances 2018/2019

Remarque préliminaire

Le contrôle se compose de deux problèmes, indépendants l'un de l'autre. Le premier problème compte pour un peu plus de 60% de la note, et le second pour un peu moins de 40%. Le second problème est probablement plus facile que le premier…

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible. Ainsi,

- lors de l'écriture des problèmes et sous-problèmes d'optimisation issus de la décomposition et coordination, on précisera toujours les variables par rapport auxquelles se fait l'optimisation, ainsi que les espaces et les parties de ces espaces dans lesquels vivent ces variables,
- à chaque itération k des algorithmes que l'on sera amenés à écrire, on distinguera clairement entre les variables à optimiser et les variables qui sont figées à cette itération : ces dernières seront repérées par un indice supérieur $^{(k)}$ (comme dans le cours).

Il est bien sûr fortement conseillé de lire attentivement et jusqu'au bout les énoncés des problèmes avant de les résoudre !!!

Premier problème : maintenance prédictive.

On considère un système complexe constitué de N éléments évoluant durant un horizon de temps discret $\{0, 1, \ldots, T\}$, le temps étant repéré par l'indice t. Chacun de ces éléments subit des avaries au cours du temps, que l'on cherche à détecter et à réparer avant qu'une panne ne survienne : c'est la problématique de la maintenance prédictive. Pour ce qui est des réparations, tous les éléments utilisent un même stock de pièces de rechange. L'état de ce stock à l'instant t est noté $s_t \in \mathbb{R}^n$ (variable continue). Toujours à l'instant t, l'élément i, pour $i \in \{1, \ldots, N\}$, est caractérisé par :

- son état de santé $x_{i,t} \in \mathbb{R}^{n_i}$, prenant en compte divers aspects de l'élément,
- la décision $u_{i,t}$ d'effectuer une maintenance sur l'élément, avec la contrainte :[1]

$$u_{i,t} \in [0, 1] \ . \tag{1}$$

La dynamique de l'état de santé de l'élément i prend en compte les avaries que subit l'élément, sa possible maintenance ainsi que l'état du stock de pièces de rechange. Sur l'horizon de temps discret d'étude $\{0, \ldots, T\}$, cette dynamique s'écrit sous la forme :

$$x_{i,0} = x_i^{\text{ini}} \text{ donné } , \tag{2a}$$
$$x_{i,t+1} = f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}) + g_{i,t}(s_t) \ , \qquad t = 0, \ldots, T-1 \ . \tag{2b}$$

La dynamique du stock est quant à elle décrite par les relations :

$$s_0 = 0 \ , \tag{3a}$$
$$s_{t+1} = s_t + \sum_{i=1}^{N} h_{i,t}(x_{i,t}) \ , \qquad t = 0, \ldots, T-1 \ , \tag{3b}$$

dans lesquelles la fonction $h_{i,t}$ tient compte de la consommation de pièces de rechange de l'unité i ainsi que du réapprovisionnement (automatique) du stock.

[1] Dans la réalité, la décision de maintenance est binaire : $u_{i,t} = 0$ ou 1, mais on considère dans ce problème une décision relaxée qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Le coût de fonctionnement de l'ensemble du système est la somme des termes suivants :

- coût de maintenance de l'élément i à l'instant $t \in \{0, \dots, T-1\}$:
$$J_{i,t}(u_{i,t}) \ , \tag{4a}$$
- coût d'indisponibilité de l'élément i à l'instant $t \in \{0, \dots, T\}$:
$$G_{i,t}(x_{i,t}) \ , \tag{4b}$$
- coût de stockage des pièces de rechange à l'instant $t \in \{0, \dots, T\}$:
$$H_t(s_t) \ . \tag{4c}$$

Le but du problème est de minimiser la somme de tous les coûts de ce système, tout en respectant l'ensemble des contraintes de borne (1) et de dynamique (2) et (3) qui y sont attachées. Pour cela, on se propose de scinder le système en $N+1$ sous-systèmes, à savoir un sous-système pour le stock de pièces de rechange et un sous-système par élément i, puis de mettre en œuvre divers méthodes de décomposition/coordination.

Modélisation du problème.

Question 1 — *Écriture du problème d'optimisation.*

1.a Écrire le problème d'optimisation correspondant à ce système (on écrira les contraintes de dynamique de telle sorte qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur le signe des multiplicateurs associés).

1.b Identifier les contraintes du problème qui créent des couplages entre le stock de pièces de rechange et les éléments du système.

Question 2 — *Écriture compacte du problème.*

Pour disposer d'une formulation plus compacte du problème, et dans la mesure où l'on souhaite décomposer le système suivant les éléments et le stock (et non suivant les instants), on introduit les notations compactes suivantes, dans lesquelles le temps n'apparaît de manière explicite :

- $u_i = (u_{i,0}, \dots, u_{i,T-1})^\top$: décisions de maintenance pour l'élément i au cours du temps,
- $x_i = (x_{i,0}, \dots, x_{i,T})^\top$: trajectoire de l'état de santé de l'élément i au cours du temps,
- $s = (s_0, \dots, s_T)^\top$: trajectoire du stock de pièces de rechange au cours du temps.

Avec ces notations, la dynamique (2) de l'élément i et la dynamique (3) du stock peuvent se réécrire de manière vectorielle, respectivement :

$$f_i(x_i, u_i) + g_i(s) - x_i = 0 \ , \quad i = 1, \dots, N \ , \tag{5a}$$
$$h_0(s) + \sum_{i=1}^{N} h_i(x_i) - s = 0 \ , \tag{5b}$$

où la t-ème composante du vecteur (5a) (resp. du vecteur (5b)) correspond à la dynamique (2) de l'élément i à l'instant t (resp. à la dynamique (3) du stock à l'instant t). On fera attention au fait que l'indice t varie entre 0 et T : chaque vecteur dans (5) a donc $T+1$ composantes.

Le coût total de maintenance de l'élément i se réécrit sous la forme :

$$J_i(u_i) = \sum_{t=0}^{T-1} J_{i,t}(u_{i,t}) \ , \tag{6}$$

et on réécrit de manière similaire le coût total d'indisponibilité $G_i(x_i)$ et le coût total de stockage $H(s)$.

2.a Donner la forme détaillée des fonctions f_i, g_i, h_0, h_i, G_i et H.

2.b Réécrire le problème d'optimisation obtenu la question 1 en utilisant ces notations compactes.

Décomposition dans le cadre additif.

On souhaite effectuer différentes décompositions du problème par élément et par stock (ce qui conduit donc à considérer $(N+1)$ sous-problèmes).

Question 3 — *Décomposition par les prix.*

On note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ les multiplicateurs associés aux contraintes (5a) et on note p le multiplicateur associé à la contrainte (5b).

3.a Appliquer l'algorithme de décomposition par les prix au problème d'optimisation sous forme compacte obtenu à la question 2 : écrire chacun des $N+1$ sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme, ainsi que l'étape de coordination associée.

3.b Donner la forme détaillée de chaque sous-problème, obtenue en revenant aux notations initiales de la question 1. Chacun de ces sous-problèmes peut-il être résolu par décomposition sur les instants, c'est-à-dire en considérant les instants t indépendamment les uns des autres ?

Question 4 — *Décomposition par prédiction.*

4.a Appliquer l'algorithme de décomposition par prédiction de type point-fixe au problème sous forme compacte obtenu à la question 2, en attribuant

- la i-ème contrainte (5a) au sous-problème associé à l'élément i,
- la contrainte (5b) au sous-problème associé au stock.

Écrire chaque sous-problème à l'itération k de l'algorithme, ainsi que l'étape de coordination associée.

4.b Donner la forme détaillée de chaque sous-problème, obtenue en revenant aux notations initiales de la question 1. Que dire du couplage en temps dans ces sous-problèmes ? Et quelles méthodes peut-on utiliser pour les résoudre ?

4.c Montrer que la solution obtenue à une itération donnée de l'algorithme de décomposition n'est pas admissible (au sens où elle ne respecte pas l'ensemble des contraintes du problème de départ). Est-il possible de modifier l'algorithme afin de le rendre admissible à chaque itération ?

Question 5 — *Décomposition par allocation de ressources.*

On se place dans le cas particulier où la dynamique (2) de l'état de santé de l'élément i *ne dépend pas* de l'état du stock de pièces de rechange :

$$x_{i,0} = x_i^{\text{ini}} \text{ donné} \ , \tag{7a}$$

$$x_{i,t+1} = f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}) \ , \qquad t = 0, \ldots, T-1 \ , \tag{7b}$$

et se met donc sous la forme compacte :

$$f_i(x_i, u_i) - x_i = 0 \ . \tag{8}$$

Le problème d'optimisation à résoudre est celui obtenu à la question 2, dans lequel la contrainte (5a) est remplacée par la contrainte (8). On notera que cette contrainte peut être considérée comme une *contrainte locale* de l'élément i, de telle sorte que la seule contrainte couplante du problème est la contrainte (5b).

5.a Appliquer de manière directe l'algorithme de décomposition par allocation de ressources au problème d'optimisation sous forme compacte ainsi obtenu : écrire chaque sous-problème, ainsi que l'étape de coordination.

5.b Donner la forme détaillée de chaque sous-problème, obtenue en revenant aux notations initiales de la question 1. Pour chaque sous-problème, indiquer par quel type de méthode il peut être résolu. Dans quelles conditions cet algorithme par allocation peut-il se bloquer ?

Décomposition dans le cas général.

On s'intéresse ici au cas particulier étudié à la question 5, dans lequel la dynamique de l'état de santé de l'élément i ne dépend pas de l'état du stock de pièces de rechange et est décrite par les relations détaillées (7) ou de manière équivalente par les relations compactes (8).

On souhaite toujours effectuer la décomposition du système selon ses éléments, mais en utilisant dorénavant le Principe du Problème Auxiliaire (PPA).

Question 6 — *Utilisation du PPA.*

6.a Montrer que les relations (3) peuvent se mettre sous la forme compacte simplifiée suivante :

$$\sum_{i=1}^{N} \widehat{h}_i(x_i) - s = 0 \,, \tag{9}$$

et donner la forme détaillée des fonctions $\widehat{h}_i$.

6.b Écrire le problème d'optimisation sous forme compacte obtenu en remplaçant dans la fonction de coût la variable vectorielle s par son expression donnée par (9). On rappelle que la contrainte (8) peut être considérée comme une contrainte locale à l'élément i.

6.c Écrire les sous-problèmes obtenus par application du PPA à ce problème avec les choix :[2]

$$K^{(k)}(u,x) = \sum_{i=1}^{N} H\Big(\widehat{h}_i(x_i) + \sum_{j\neq i} \widehat{h}_j(x_j^{(k)})\Big) \,, \quad J^{\Sigma}(u,x) = \sum_{i=1}^{N} \Big(J_i(u_i) + G_i(x_i)\Big) \quad \text{et} \quad \epsilon^{(k)} \equiv 1 \,.$$

Écrire les sous-problèmes obtenus par application du PPA à ce problème avec les choix :

$$K^{(k)}(u,x) = \sum_{i=1}^{N} \Big(J_i(u_i) + G_i(x_i)\Big) \,, \quad J^{\Sigma}(u,x) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \epsilon^{(k)} \equiv 1 \,.$$

6.d Discuter (sans trop entrer dans les détails) des hypothèses à faire pour que l'algorithme associé à l'application du PPA converge vers une solution du problème. Discuter des conditions permettant de choisir les coefficients $\epsilon^{(k)}$ identiquement égaux à la valeur 1, et proposer un moyen de faire ce choix quand les conditions ne sont pas remplies.

[2]Voir les notes de cours sur le PPA pour la signification des notations $K^{(k)}$, J^{Σ} et $\epsilon^{(k)}$.

Second problème : unités de production connectées.

On considère un ensemble de N unités de production. Le fonctionnement de l'unité i dépend d'une variable de décision locale $u_i \in U_i^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{R}^{n_i}$, et d'une variable de décision globale $v \in V^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{R}^m$ qui est partagée par toutes les unités. Le coût de l'unité i pour un couple de décisions (u_i, v) est noté $F_i(u_i, v)$, et on associe à la variable de décision globale v un coût $I(v)$. Le problème global d'optimisation s'écrit alors :

$$\min_{\substack{v \in V^{\mathrm{ad}} \\ (u_i \in U_i^{\mathrm{ad}})}} \quad \sum_{i=1}^{N} F_i(u_i, v) + I(v) \ . \tag{10}$$

Sous cette forme, le problème n'a pas une structure additive puisque la variable v est commune à toutes les unités. On introduit alors une nouvelle variable de décision v_i pour chaque unité i, et on contraint ces variables à être toutes égales à la variable v. On obtient alors un nouveau problème d'optimisation, à savoir :

$$\min_{\substack{v \in V^{\mathrm{ad}} \\ ((u_i, v_i) \in U_i^{\mathrm{ad}} \times \mathbb{R}^m)}} \quad \sum_{i=1}^{N} F_i(u_i, v_i) + I(v) \ , \tag{11a}$$

sous les contraintes :

$$v_i - v = 0 \ , \qquad i = 1, \ldots, N \ . \tag{11b}$$

Question 1 *Structure du problème et méthode de décomposition par les prix.*

1.a Prouver que les problèmes d'optimisation (10) et (11) sont équivalents.

1.b Mettre les contraintes (11b) sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{N} \Theta_i(v_i) + \Theta(v) = 0 \ , \tag{12}$$

et donner l'expression des fonctions $\Theta_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m.N}$ et $\Theta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m.N}$. En déduire qu'il est possible d'appliquer les méthodes de décomposition par les prix, les quantités et par prédiction au problème (11), avec N sous-problèmes associés aux unités de production et un $(N+1)$-ème sous-problème portant sur la variable v.

1.c Écrire précisément les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme de la méthode de décomposition par les prix, et donner la formule de remise à jour des multiplicateurs des contraintes couplantes. Préciser les hypothèses sous lesquelles cet algorithme converge.

Question 2 *Méthode de décomposition par les quantités.*

2.a Appliquer pour commencer la méthode de décomposition par les quantités de manière "naïve" en introduisant une allocation $(w_1, \ldots, w_N, w_{N+1})$ pour la contrainte sous la forme (12). Écrire les sous-problèmes correspondants à cette décomposition ainsi que l'étape de coordination associée ; discuter de la réalisabilité en pratique de l'algorithme obtenu et de ses possibles blocages.

2.b Proposer ensuite une mise en œuvre plus "élaborée" de la méthode permettant de contourner les difficultés identifiées à la question précédente. Pour cela, on identifiera un sous-ensemble des variables du problème tel que le problème se décompose une fois ces variables fixées. Écrire les sous-problèmes et l'étape de coordination qui en découlent, et montrer que cette mise en œuvre de l'algorithme est réalisable en pratique.

Question 3 *Méthode de décomposition par prédiction.*

Pour mettre en œuvre la méthode de décomposition par prédiction, on décide d'affecter la contrainte $v_i - v = 0$ à l'unité de production i, pour tout $i = 1, \ldots, N$.

3 Écrire les sous-problèmes apparaissant dans cette méthode à l'itération k, et écrire l'étape de coordination associée à la mise en œuvre de type "point-fixe" de la méthode.

Question 4 *Principe du Problème Auxiliaire.*

Revenant à la formulation initiale (10) du problème sans contrainte, on souhaite appliquer le Principe du Problème Auxiliaire avec :

$$J(u_1, \ldots, u_N, v) = \sum_{i=1}^{N} F_i(u_i, v) + I(v) \qquad \text{et} \qquad J^{\Sigma}(u_1, \ldots, u_N, v) \equiv 0 \ .$$

4.a On effectue le premier choix de noyau de décomposition suivant :

$$K^{(k)}(u_1, \ldots, u_N, v) = \sum_{i=1}^{N} F_i(u_i, v^{(k)}) + \sum_{i=1}^{N} F_i(u_i^{(k)}, v) + I(v) \ .$$

Écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme avec ce choix de noyau, en précisant les hypothèses sous lesquelles l'algorithme converge. Spécifier les sous-problèmes dans le cas où les coefficients $\epsilon^{(k)}$ apparaissant dans le PPA sont pris égaux à 1, et justifier le fait de pouvoir choisir ces coefficients égaux à 1.

4.b On effectue un second choix de noyau de décomposition :

$$K^{(k)}(u_1, \ldots, u_N, v) = \sum_{i=1}^{N} F_i(u_i, v^{(k)}) + \frac{1}{2\rho}\|v\|^2 \ .$$

Écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme avec ce choix de noyau, dans le cas où les coefficients $\epsilon^{(k)}$ apparaissant dans le PPA sont pris égaux à 1.

Question 5 *Comparaisons et conclusions.*

Discuter les différents algorithmes obtenus lors des questions précédentes (facilité de mise en œuvre, admissibilité, vitesse. . .), et comparer les différentes méthodes entre elles sur le cas traité.