1 Contrôle des connaissances 2019/2020

Remarque préliminaire importante

Le contrôle se compose de deux problèmes qui sont indépendants l'un de l'autre. Le premier problème (comptant pour 40% de la note) porte sur l'application des méthodes de décomposition à un problème de gestion de barrages, alors que le second problème (60% de la note) porte sur la mise en œuvre de ces méthodes à un problème de répartition optimale de l'énergie disponible à l'intérieur d'une micro-grille.

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible. Ainsi,

— lors de l'écriture de chaque problème d'optimisation et de chaque sous-problème issu de la décomposition, on précisera les variables par rapport auxquelles se fait l'optimisation, ainsi que les espaces et les parties de ces espaces dans lesquels vivent ces variables,

— on distinguera clairement les variables à optimiser de celles qui sont figées à l'étape du calcul considéré.

Enfin, il est fortement conseillé de prendre le temps de lire attentivement les énoncés des problèmes même s'ils sont parfois un peu longs...

Premier problème : gestion d'une vallée hydraulique

On s'intéresse à la gestion globale d'une vallée hydraulique composée de 3 retenues d'eau (barrages) en cascade sur un horizon de temps discret $\{0, 1, \dots, T-1, T\}$. Chaque barrage est alimenté par des apports d'eau donnés, et on décide à chaque pas de temps de turbiner une partie de l'eau qu'il contient pour produire de l'électricité. La quantité d'eau turbinée à un pas de temps t par le barrage i se retrouve au même pas de temps dans le barrage $i+1$ (barrage immédiatement en aval du barrage i). Le barrage de tête (barrage 1) n'est alimenté que par ses apports naturels. Enfin, l'eau turbinée par le dernier barrage (barrage 3) est perdue pour la vallée hydraulique.

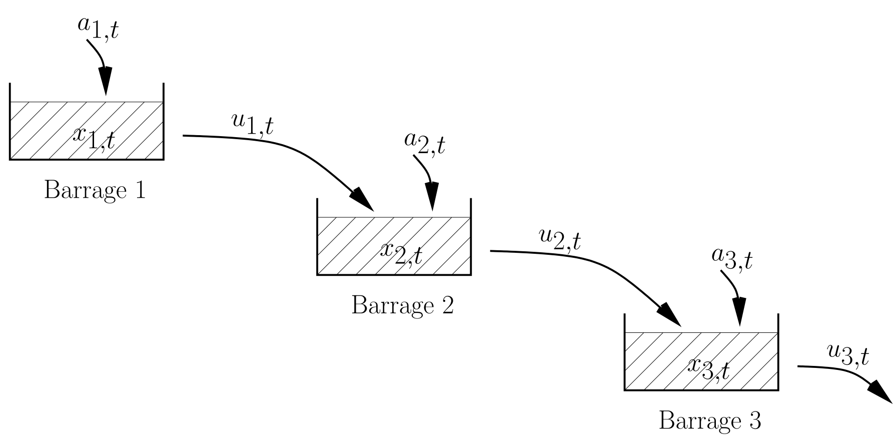


Figure 1 – Fonctionnement d'une vallée hydraulique

Le but de la gestion est de valoriser de manière optimale la production d'électricité totale sur l'horizon de temps $\{0, \dots, T\}$ tout en s'assurant qu'on laisse dans chaque barrage une quantité d'eau suffisante à l'instant final T afin de préserver l'avenir. Cette dernière considération se traduit par un coût de pénalisation portant sur la quantité d'eau disponible en fin d'horizon dans chaque barrage.

1. Formalisation du problème

Pour chaque barrage $i \in \{1,2,3\}$, on note :
- $x_{i,t} \in \mathbb{R}$ le volume d'eau présent dans le barrage à l'instant t,
- $u_{i,t} \in \mathbb{R}$ la quantité d'eau turbinée par le barrage durant le pas de temps $[t, t+1[$,

et
- $f_{i,t}$ la fonction donnant l'évolution du barrage durant le pas de temps $[t, t+1[$,
- $L_{i,t}$ la fonction donnant le coût de turbinage durant le pas de temps $[t, t+1[$, [1]
- K_i la fonction donnant le coût de pénalisation de l'état du barrage à l'instant final T.

Le problème d'optimisation à résoudre s'écrit :

$$\min_{\substack{(u_{i,0},\dots,u_{i,T-1})_{i=1,2,3} \\ (x_{i,0},\dots,x_{i,T})_{i=1,2,3}}} \quad \sum_{i=1}^{3} \Big(\sum_{t=0}^{T-1} L_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}) + K_i(x_{i,T}) \Big) , \tag{1a}$$

sous des contraintes décrivant l'évolution des barrages au cours du temps :

$$x_{1,0} \text{ connu} \ , \quad x_{1,t+1} = f_{1,t}(x_{1,t}, u_{1,t}) \qquad \forall t \in \{0,\dots,T-1\} \ , \tag{1b}$$

$$x_{i,0} \text{ connu} \ , \quad x_{i,t+1} = f_{i,t}(x_{i,t}, u_{i,t}, u_{i-1,t}) \quad \forall t \in \{0,\dots,T-1\} \ , \quad \forall i \in \{2,3\} \ , \tag{1c}$$

et sous des contraintes de bornes à respecter par les quantités d'eau turbinées :

$$u_{i,t} \in [\underline{u}_i, \overline{u}_i] \quad \forall t \in \{0,\dots,T-1\} \ , \quad \forall i \in \{1,2,3\} \ . \tag{1d}$$

Q1 On veut résoudre le problème (1) en lui appliquant une décomposition *barrage par barrage*, le sous-problème $i \in \{1,2,3\}$ ayant à sa charge la gestion au cours du temps du barrage i. [2] Notant que le seul couplage entre deux barrages consécutifs $i-1$ et i provient de la présence des variables $u_{i-1,t}$ dans l'équation (1c) décrivant la dynamique du barrage i, on introduit dans le problème des variables supplémentaires $w_{i,t}$, $i \in \{2,3\}$ et $t \in \{0,\dots,T-1\}$, avec les contraintes supplémentaires :

$$w_{i,t} - u_{i-1,t} = 0 \quad \forall t \in \{0,\dots,T-1\} \ , \quad \forall i \in \{2,3\} \ . \tag{1e}$$

Q1.1 Écrire le problème d'optimisation équivalent au problème (1) obtenu en ajoutant ces nouvelles variables et ces nouvelles contraintes. Détailler la manière dont on va décomposer ce problème barrage par barrage en précisant, pour chaque sous-problème associé à un barrage i,
- les variables d'optimisation du sous-problème i,
- les contraintes locales du sous-problème i : ces contraintes pourront être représentées par un ensemble admissible propre au sous-problème,
- les contraintes couplant les sous-problèmes entre eux : ces contraintes devront être traitées par les méthodes de décomposition.

Q1.2 Donner des hypothèses sur les fonctions $f_{i,t}$, $L_{i,t}$ et K_i permettant d'assurer l'existence de solutions pour le problème (1).

Q2 Utilisant le fait que le problème formulé à la question **Q1** a une structure additive en les barrages, on met en œuvre les différentes techniques de décomposition et coordination (prix, quantité, prédiction) afin de le résoudre.

---

1. Ce coût est en fait négatif et correspond au fait de vendre l'électricité produite par les turbines.
2. On notera bien que la décomposition se fera barrage par barrage et non pas de temps par pas de temps.

Q2.1 Appliquer l'algorithme de *décomposition par les prix* au problème obtenu à la question **Q1**. On écrira *avec précision* les différents sous-problèmes qui apparaissent dans la décomposition ainsi que la phase de coordination, on donnera la justification théorique de l'utilisation de cette méthode, on discutera des avantages et des inconvénients de la méthode et on proposera (sans entrer dans les détails…) des méthodes numériques permettant de résoudre les sous-problèmes.

Q2.2 Appliquer au problème l'algorithme de *décomposition par prédiction* de type point-fixe, en choisissant d'affecter au sous-problème i les contraintes $w_{i,t} - u_{i-1,t} = 0$, $t = 0, \dots, T-1$, pour chaque indice $i \in \{2, 3\}$. On écrira *avec précision* les différents sous-problèmes apparaissant dans la décomposition ainsi que la phase de coordination et on discutera des avantages et des inconvénients de la méthode.

Q2.3 Constatant que le problème se décompose barrage par barrage lorsque l'on fixe les variables $(w_{2,0}, \dots, w_{2,T-1})$ et $(w_{3,0}, \dots, w_{3,T-1})$, appliquer un algorithme de type *décomposition par les quantités*. On écrira *avec précision* les différents sous-problèmes apparaissant dans la décomposition, et on indiquera comment se fait la phase de coordination. Cet algorithme peut-il se bloquer ? Et que peut-on dire de son efficacité ?

Q3 On repart de la formulation initiale (1) du problème. Les variables d'état $x_{i,t}$ étant entièrement déterminées par les équations (1b)–(1c), on peut de manière récursive les exprimer en fonction des commandes des barrages uniquement. Substituant ces expressions dans le critère (1a), on obtient une expression du critère ne dépendant plus que des commandes des barrages et on peut alors mettre en œuvre le Principe du Problème Auxiliaire pour résoudre le problème.

Q3.1 Montrer à l'aide des équations (1b) et (1c) que l'état des barrages s'écrit sous la forme :

$$x_{1,t+1} = \varphi_{1,t}(u_{1,0}, \dots, u_{1,t}) \qquad \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \, , \tag{2a}$$

$$x_{i,t+1} = \varphi_{i,t}(u_{i,0}, \dots, u_{i,t}, u_{i-1,0}, \dots, u_{i-1,t}) \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \, , \quad \forall i \in \{2, 3\} \, , \tag{2b}$$

Utilisant la notation $u_i = (u_{i,0}, \dots, u_{i,T-1})$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, montrer que le problème d'optimisation (1) s'écrit sous la forme équivalente :

$$\min_{(u_1,u_2,u_3)} J_1(u_1) + J_2(u_2, u_1) + J_3(u_3, u_2) \quad \text{s.t.} \quad u_i \in [\underline{u}_i, \overline{u}_i]^T, \ i = 1, 2, 3 \, . \tag{3}$$

Q3.2 Appliquer à la formulation (3) du problème le Principe du Problème Auxiliaire (PPA) en utilisant la famille de noyaux de décomposition suivante :

$$K^{(k)}(u_1, u_2, u_3) = J_1(u_1) + J_2(u_2, u_1^{(k)}) + J_3(u_3, u_2^{(k)}) \, ,$$

et une famille de coefficients $\{\epsilon^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$. On écrira précisément les sous-problèmes issus de la décomposition induite par ce choix de noyaux et on donnera les hypothèses pour que cet algorithme converge. On donnera les conditions permettant de choisir des pas $\epsilon^{(k)}$ égaux à 1.

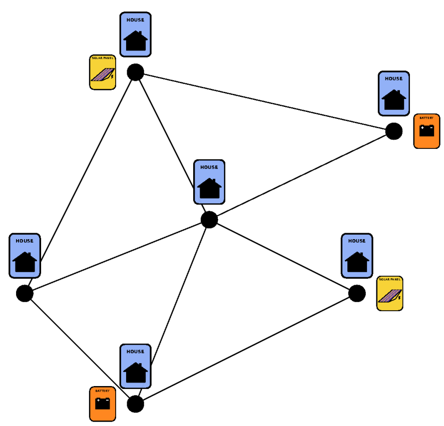
Q3.3 Supposant que les pas $\epsilon^{(k)}$ sont égaux à 1, réécrire les sous-problèmes obtenus à la question **Q3.2** avec les notations du problème (1), c'est à dire en réintroduisant les variables d'état $x_{i,t}$. À quelle méthode de décomposition vue à la question **Q2** s'apparente cet algorithme du PPA ?

Deuxième problème : énergies dans une micro-grille

On considère une micro-grille regroupant plusieurs bâtiments. Chaque bâtiment correspond à un consommateur/producteur d'énergie (**prosumer**), qui est capable d'échanger son énergie disponible avec les autres prosumers par le réseau associé à la micro-grille. Chaque prosumer est constitué de capacités de stockage (ballon d'eau chaude, batterie), de moyens de production (connexion au réseau Enedis, panneaux solaires) et de consommateurs (habitants du bâtiment). On modélise le réseau par un graphe $\mathcal{G} = \big(\mathcal{A}, \mathcal{N}\big)$, où chaque prosumer est localisé à un nœud $n \in \mathcal{N}$ du graphe, et où chaque arc $a \in \mathcal{A}$ du graphe permet d'échanger de l'énergie entre les deux prosumers situés aux extrémités de l'arc. On a $\mathcal{A} = \{1, \dots, |\mathcal{A}|\}$ où $|\mathcal{A}|$ est le nombre d'arcs du graphe, et $\mathcal{N} = \{1, \dots, |\mathcal{N}|\}$ où $|\mathcal{N}|$ est le nombre de nœuds du graphe $\mathcal{G}$. On suppose que le graphe $\mathcal{G}$ est connexe et on note M sa matrice d'incidence nœud–arc (voir figure 2) :

$$M_{n,a} = \begin{cases} -1 & \text{si le nœud } n \text{ est l'origine de l'arc } a, \\ +1 & \text{si le nœud } n \text{ est l'extrémité de l'arc } a, \\ \;\;0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad .$$

Ainsi, dans chaque colonne de la matrice M, les valeurs -1 et $+1$ apparaissent une fois et une seule, de telle sorte que la somme des lignes de la matrice M est identiquement nulle.



$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{pmatrix}$$

Figure 2 – Exemple de micro-grille et matrice d'incidence associée

À un instant t, on note q_t le vecteur des flux d'énergie transitant sur les arcs du graphe et φ_t le vecteur des quantités d'énergie importées ou exportées par les prosumers :

$$q_t = \big(q_{a,t}\big)_{a \in \mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}|} \quad , \quad \varphi_t = \big(\varphi_{n,t}\big)_{n \in \mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|} \ .$$

Les échanges d'énergie sur le graphe sont soumis à chaque instant t à la première loi de Kirchhoff, qui stipule que la somme des débits entrant et sortant en chaque nœud du graphe est nulle. Ceci s'écrit à l'aide de la matrice d'incidence de graphe M, sous la forme vectorielle suivante :

$$M q_t - \varphi_t = 0 \ . \tag{4}$$

Cette équation vectorielle peut être écrite pour chaque ligne M_n de la matrice M, d'où la formulation scalaire suivante, équivalente à l'équation (4) :

$$M_n q_t - \varphi_{n,t} = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N} \ . \tag{5}$$

Remarque 1. On remarquera que la structure de la matrice M, et plus précisément le fait que la somme des lignes M_n de cette matrice soit identiquement nulle (car chaque colonne de la matrice M ne comporte qu'un $+1$ et un -1), est telle que l'équation (4) implique la relation :

$$\sum_{n\in\mathcal{N}} \varphi_{n,t} = 0 \; .$$

On en déduit que l'image de l'application linéaire associée à la matrice M n'est pas l'espace $\mathbb{R}^{|\mathcal{N}|}$ tout entier. □

On se pose le problème de la gestion optimale de cette micro-grille sur un horizon de temps discret $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T-1, T\}$.

— On suppose qu'il y a un coût associé au transport de l'énergie au travers du réseau. On note $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction associant au flux d'énergie dans un arc le coût de transport induit, que l'on suppose quadratique : $\ell(q) = \frac{1}{2}\,\alpha\, q^2$, avec $\alpha > 0$. Alors, le coût total de transport du réseau durant l'horizon $\mathcal{T}$ s'écrit :

$$J_{\mathcal{A}}(q_1, \dots, q_T) = \sum_{a\in\mathcal{A}} \sum_{t\in\mathcal{T}} \ell(q_{a,t}) \; . \tag{6}$$

— Le coût associé à un nœud $n \in \mathcal{N}$ est noté J_n et dépend des quantités d'énergie $\varphi_{n,t}$ importées ou exportées par le prosumer. Ce coût résulte d'une optimisation mettant en jeu l'ensemble des composants du prosumer :

$$J_n(\varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,T}) = \min_{(u_{n,1},\dots,u_{n,T})} \sum_{t\in\mathcal{T}} L_n(x_{n,t}, u_{n,t}) \; , \tag{7a}$$

sous les contraintes

$$x_{n,t+1} = f_n(x_{n,t}, u_{n,t}) \qquad \forall t \in \mathcal{T} \; , \tag{7b}$$

$$u_{n,t} + \varphi_{n,t} + s_{n,t} - d_{n,t} = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T} \; , \tag{7c}$$

où la variable $x_{n,t}$ représente l'état à l'instant t des stocks du prosumer n (batterie, ballon d'eau chaude), la variable $u_{n,t}$ la commande à choisir à l'instant t (utilisation des stocks, achat d'énergie à Enedis), la variable $s_{n,t}$ la production d'énergie photo-voltaïque et la variable $d_{n,t}$ la consommation du prosumer (ces deux dernières variables étant des *données du problème*). La fonction de coût L_n fournit le coût instantané d'achat d'énergie à Enedis et la fonction f_n décrit la dynamique du système (l'état initial $x_{n,1}$ des stocks est une donnée du problème). Le problème d'optimisation (7) se fait à quantités d'énergie $(\varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,T})$ fixées.

Rassemblant les équations (5) — (6) — (7), le problème d'optimisation de la micro-grille s'écrit sous la forme compacte suivante :

$$\min_{\substack{(q_1,\dots,q_T)\\(\varphi_{n,1},\dots,\varphi_{n,T})_{n\in\mathcal{N}}}} J_{\mathcal{A}}(q_1, \dots, q_T) + \sum_{n\in\mathcal{N}} J_n(\varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,T}) \; , \tag{8a}$$

$$\text{sous :} \;\; M_n q_t - \varphi_{n,t} = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N} \; , \quad \forall t \in \mathcal{T} \; . \tag{8b}$$

Le but de l'étude est de résoudre ce grand problème (la micro-grille peut comporter plusieurs dizaines de bâtiments) par des méthodes de décomposition et coordination, avec un sous-problème correspond au transport sur le réseau et autant de sous-problèmes qu'il y a de nœuds dans le réseau.

Q1 *Décomposition par les prix.*

Q1.1 Appliquer l'algorithme de décomposition par les prix au problème (8) : écrire le sous-problème associé au transport sur le réseau, écrire les $|\mathcal{N}|$ sous-problèmes associés aux nœuds du réseau, ainsi que l'étape de coordination.

Q1.2 Préciser les hypothèses à satisfaire pour que cet algorithme converge vers une solution du problème (8).

Q1.3 Écrire de manière détaillée le sous-problème associé au transport et le sous-problème associé à un nœud n du réseau, en y incorporant la dimension temporelle ; montrer que le sous-problème associé au transport se décompose lui-même arc par arc et instant par instant, et donner la solution analytique de ce sous-problème. Écrire les équations de la Programmation Dynamique permettant de résoudre le sous-problème associé à un nœud n du réseau.

Q2 *Décomposition par allocation de ressources.*

Q2.1 Appliquer de manière directe l'algorithme de décomposition par allocation de ressources au problème (8) : écrire le sous-problème associé au transport, celui associé à un nœud n du réseau, ainsi que l'étape de coordination. En s'appuyant sur la remarque 1, montrer que l'ensemble admissible du sous-problème associé au transport peut être vide et que l'algorithme peut donc se bloquer.

Q2.2 Pour contourner le problème de blocage de la question précédente, on remarque que fixer les variables $q_{a,t}$ de flux dans les arcs du réseau permet la décomposition du problème (8). Utilisant ce constat, appliquer un algorithme de type décomposition par les quantités au problème (8). On identifiera le sous-problème associé au transport, on écrira le sous-problème associé à un nœud n du réseau ainsi que l'étape de coordination. Cet algorithme peut-il se bloquer ?

Q2.3 À partir des résultats de la question **Q2.2**, écrire de manière détaillée le sous-problème associé au transport et le sous-problème associé à un nœud n du réseau, en y incorporant la dimension temporelle.

Q3 *Décomposition par prédiction.*

Q3.1 Appliquer l'algorithme de décomposition par prédiction de type point-fixe au problème (8) en attribuant toutes les contraintes couplantes (8b) au sous-problème associé au transport ; écrire le sous-problème associé au transport, le sous-problème associé à chaque nœud n ainsi que l'étape de coordination, et discuter de l'admissibilité du sous-problème associé au transport.

Q3.2 Appliquer l'algorithme de décomposition par prédiction de type point-fixe au problème (8) en attribuant la contrainte couplante (8b) du nœud n au sous-problème associé au nœud n ; écrire le sous-problème associé au transport, le sous-problème associé à chaque nœud n ainsi que l'étape de coordination. Enfin, écrire de manière détaillée le sous-problème associé au transport et le sous-problème associé à un nœud n du réseau en y incorporant la dimension temporelle, et faire le lien avec les sous-problèmes obtenus aux questions **Q1.3** et **Q2.3**.

Q4 *Utilisation du Principe du Problème Auxiliaire.*

Utilisant les contraintes (8b) pour exprimer les vecteurs φ_t, le problème (8) s'écrit sous la forme équivalente suivante :

$$\min_{(q_1,\ldots,q_T)} \; J_{\mathcal{A}}(q_1,\ldots,q_T) + \sum_{n\in\mathcal{N}} J_n(M_n q_1,\ldots,M_n q_T) \; . \tag{9}$$

Q4.1 Appliquer le Principe du Problème Auxiliaire (PPA) au problème (9) avec les choix suivants de noyaux et de coefficients :

$$K(q_1,\ldots,q_T) = J_{\mathcal{A}}(q_1,\ldots,q_T) \quad ; \quad \epsilon^{(k)} > 0 \quad \forall k \; .$$

Q4.2 Donner les hypothèses à satisfaire pour que l'algorithme associé à cette application du PPA converge vers une solution du problème (9).

Q4.3 Discuter de la possibilité de pouvoir choisir les coefficients $\epsilon^{(k)}$ tous égaux à la valeur 1. Avec ce choix, écrire l'algorithme du PPA et indiquer (en justifiant votre réponse) à quel algorithme il s'identifie parmi ceux vus aux questions précédentes (prix, allocation, prédiction).