

MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION EN OPTIMISATION STOCHASTIQUE

Systems and Optimization Working Group (SOWG)^b

Plan de la présentation

- Quelques rappels du cas déterministe
- Généralités sur l'optimisation stochastique
- Point de vue des chroniques arborescentes
- Illustrations sur un ou deux exemples

^bgroupe composé d'étudiants et de chercheurs du CERMICS (ENPC) et de l'UMA (ENSTA)

QUELQUES RAPPELS DU CAS DÉTERMINISTE (1)

Problème dynamique déterministe en temps discret

$$\text{Objectif} \quad : \quad \sum_{t=0}^{T-1} L_{t+1}(x_t, u_t) + \Phi(x_T) . \quad (1a)$$

$$\text{Dynamique} \quad : \quad x_{t+1} = F_{t+1}(x_t, u_t) , \quad x_0 \text{ donné} . \quad (1b)$$

$$\text{Contraintes} \quad : \quad G_{t+1}(x_t, u_t) \leq 0 . \quad (1c)$$

Il s'agit de minimiser le coût par le choix des **vecteurs** u_t et x_t .

Ingrédients pour la résolution

- Exploiter efficacement la structure temporelle (DP, état-adjoint).
- Mettre en œuvre des techniques de décomposition et coordination.
- Utiliser des solveurs adaptés pour les sous-problèmes (LP, SQP, IP, ...).

Résultats escomptés

Rien de plus que les trajectoires de la commande $u_t^\#$, de l'état $x_t^\#$, des multiplicateurs.

QUELQUES RAPPELS DU CAS DÉTERMINISTE (2)

À propos de la décomposition-coordination

Dans le cas “classique” de N sous-systèmes indépendants liés par des contraintes additives :

$$\min \sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=0}^{T-1} L_{t+1}^i \left(x_t^i, u_t^i \right) + \Phi^i \left(x_T^i \right) \right), \quad (2a)$$

$$x_{t+1}^i = F_{t+1}^i \left(x_t^i, u_t^i \right) \quad \forall i, \quad (2b)$$

$$\sum_{i=1}^N G_{t+1}^i \left(x_t^i, u_t^i \right) \leq 0 \quad \forall t, \quad (2c)$$

la **décomposition par les prix** semble s'imposer naturellement. Pourtant :

- elle n'est “facile” que dans le cas où le coût et les contraintes sont de **forme additive**,
- il vaut mieux la mettre en œuvre à l'aide d'un **lagrangien augmenté que l'on linéarise**,
- d'**autres techniques** de décomposition existent, qui peuvent s'avérer plus efficaces.

GÉNÉRALITÉS SUR L'OPTIMISATION STOCHASTIQUE (1)

Problème dynamique stochastique en temps discret

$$\text{Objectif} \quad : \quad \mathbb{E} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} L_{t+1}(x_t, u_t, \omega_{t+1}) + \Phi(x_T) \right\} . \quad (3a)$$

$$\text{Dynamique} \quad : \quad x_{t+1} = F_{t+1}(x_t, u_t, \omega_{t+1}) , \quad x_0 = F_0(\omega_0) . \quad (3b)$$

$$\text{Contraintes} \quad : \quad G_{t+1}(x_t, u_t, \omega_{t+1}) \leq 0 . \quad (3c)$$

$$\text{Observation} \quad : \quad z_{t+1} = H_{t+1}(x_t, u_t, \omega_{t+1}) , \quad z_0 = H_0(\omega_0) . \quad (3d)$$

$$\text{Information} \quad : \quad y_t = C_t(z_0, \dots, z_t) \quad \text{et l'on veut} \quad u_t = \Gamma_t(y_t) . \quad (3e)$$

Il s'agit alors de minimiser l'espérance du coût par le choix des **fonctions** Γ_t

Dans le cas général, on ne sait pas écrire les conditions d'optimalité d'un tel problème.

Contre-exemple de Witsenhausen

$$\begin{array}{llll} x_1 = \omega_0 + u_0 & y_0 = \omega_0 & \omega_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma) & u_0 = \Gamma_0(y_0) \\ x_2 = x_1 - u_1 & y_1 = x_1 + \omega_1 & \omega_1 \sim \mathcal{N}(0, 1) & u_1 = \Gamma_1(y_1) \end{array}$$

GÉNÉRALITÉS SUR L'OPTIMISATION STOCHASTIQUE (2)

Structure d'information classique

Outre certaines hypothèses implicites, on suppose que l'on est en *mémoire parfaite* : $y_t \preceq y_{t+1}$. Alors, la **programmation dynamique** est *théoriquement* utilisable, et le devient *pratiquement* dans le cas **markovien** ($z_t = x_t$), pourvu que la dimension du vecteur d'état x_t reste modeste (≤ 3).

La **difficulté** est alors que l'on ne sait pas décomposer le calcul de la programmation dynamique :

comment reconstituer les feedbacks $u^i(x^1, \dots, x^N, t)$ à partir des $u^i(x^i, t)$???

- Boucle ouverte : $u : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{U}$, et la décomposition de l'espace de ces applications est équivalente à celle de l'espace d'arrivée \mathcal{U} .
- Boucle fermée : $u : \mathcal{X} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{U}$, et la décomposition de l'espace de *départ* \mathcal{X} ne se traduit pas par une décomposition analogue de l'espace des applications.

Une réponse possible

Se placer dans un cadre mathématique où la décomposition ne concerne que l'espace d'arrivée des fonctions (et donc renoncer à la programmation dynamique).

POINT DE VUE DES CHRONIQUES ARBORESCENTES (1)

Idées sous-jacentes

- Indexer les commandes u par les aléas ω plutôt que par les observations y .
- Ajouter a posteriori une contrainte imposant la dépendance en y de u .

Cadre minimal

<i>Espaces</i>	<i>Fonctions</i>	
Ω : trajectoires des bruits (fini)	$j : \mathcal{U} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$	$\omega = \{\omega_0, \dots, \omega_T\}$
\mathcal{U} : trajectoires des commandes	$\gamma : \Omega \longrightarrow \mathcal{U}$	$u = \gamma(\omega) = \{\gamma_t(\omega)\}_{t=0}^{T-1}$
\mathcal{Y} : trajectoires des informations	$h : \mathcal{U} \times \Omega \longrightarrow \mathcal{Y}$	$y = h(u, \omega) = \{h_t(u, \omega)\}_{t=0}^{T-1}$

$$\min_{\gamma} \mathbb{E} \{j(u, \omega)\} \quad \text{sous les contraintes} \quad \gamma_t(\cdot) \preceq h_t(\gamma(\cdot), \cdot), \quad (4)$$

$$\text{avec} \quad : \quad f \preceq g \iff \left(g(\omega) = g(\omega') \Rightarrow f(\omega) = f(\omega') \right)$$

$$\text{et} \quad : \quad f \equiv g \iff \left(g(\omega) = g(\omega') \Leftrightarrow f(\omega) = f(\omega') \right).$$

POINT DE VUE DES CHRONIQUES ARBORESCENTES (2)

Absence d'effet dual

- Cas de la *boucle ouverte*. Il existe des fonctions ζ_t (toutes définies sur Ω) telles que, pour toutes les commandes constantes $u \in \mathcal{U}$, on ait :

$$h_t(u, \cdot) \equiv \zeta_t(\cdot) . \quad (5)$$

- Cas de la *boucle fermée*. Sous les hypothèses suivantes :

- **information en mémoire parfaite** : $h_t(\cdot, \cdot) \preceq h_{t+1}(\cdot, \cdot)$,
- **information causale** : h_t ne dépend que des $\{u_\tau\}, \tau \leq t - 1$ et des $\{\omega_\tau\}, \tau \leq t$,
- **absence d'effet dual en boucle ouverte** : $h_t(u, \cdot) \equiv \zeta_t(\cdot)$,

tous les feedbacks γ admissibles — $\gamma_t(\cdot) \preceq h_t(\gamma(\cdot), \cdot)$ — vérifient :

$$h_t(\gamma(\cdot), \cdot) \equiv \zeta_t(\cdot) . \quad (6)$$

- Une situation favorable : $h_t(u, \omega) = h_t^\#(u) + h_t^b(\omega)$.

POINT DE VUE DES CHRONIQUES ARBORESCENTES (3)

Discrétisation

On se place dans le cas où il y a **absence d'effet dual** : $\gamma_t \preceq \zeta_t$.

Il s'agit de discrétiser le problème (4) de telle sorte que le problème résultant le représente bien : mariage de l'**analyse** (approximation) et de l'**algèbre** (mesurabilité).

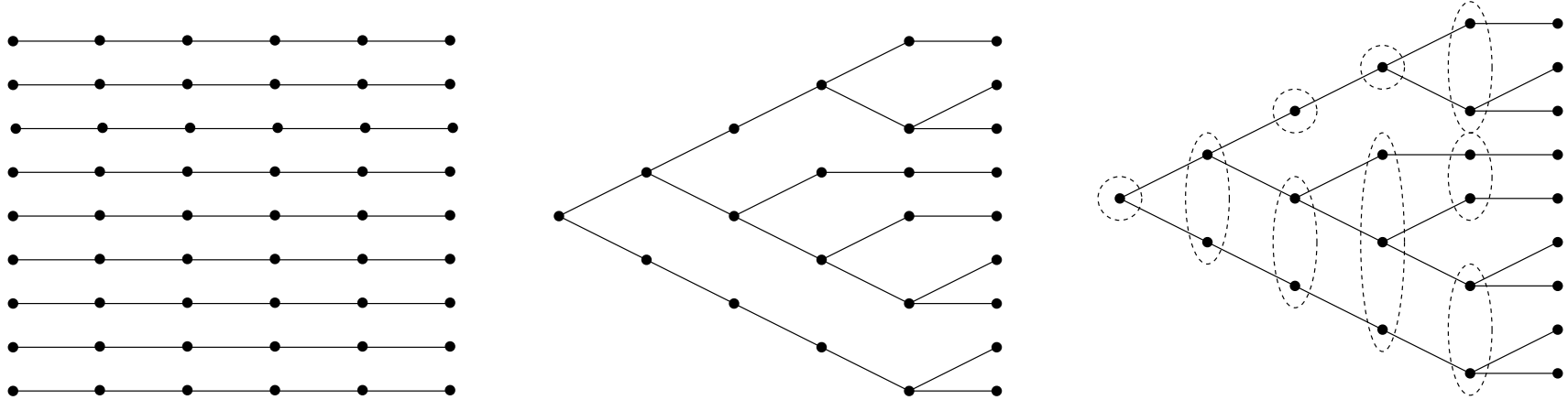
Principes de la quantification

Il faut définir un procédé fournissant :

- des applications $\hat{q}_t : \Omega \longrightarrow \Omega$, ne prenant qu'un nombre **fini** de valeurs, qui représentent la quantification des trajectoires du bruit au pas de temps t , avec la propriété : $\hat{q}_t \preceq \hat{q}_{t+1}$,
- des applications $\hat{\zeta}_t : \Omega \longrightarrow \mathcal{Y}$, qui représentent la quantification de l'information, avec :
 1. $\hat{\zeta}_t \preceq \zeta_t$ (respect de la contrainte initiale),
 2. $\hat{\zeta}_t \preceq \hat{q}_t$ (formulation sur l'espace des bruits quantifiés),
 3. $\hat{\zeta}_t \preceq \hat{\zeta}_{t+1}$ (propriété de mémoire parfaite).

POINT DE VUE DES CHRONIQUES ARBORESCENTES (4)

Exemple “classique” de quantification

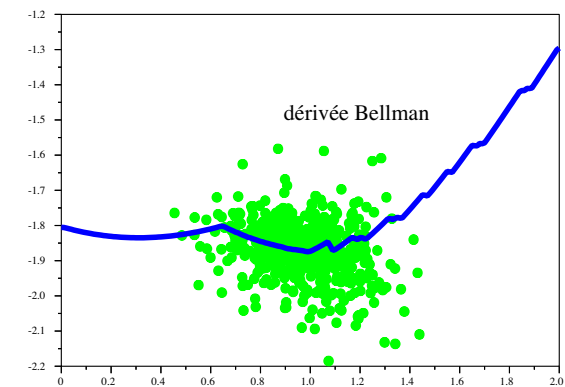
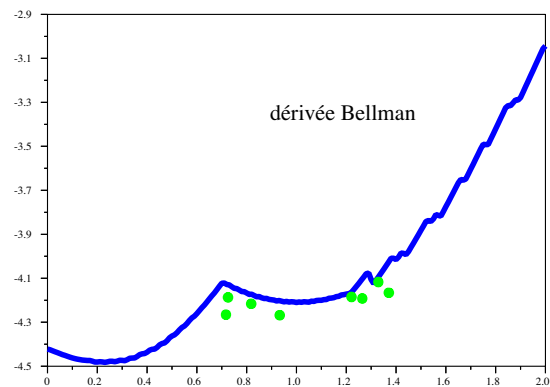
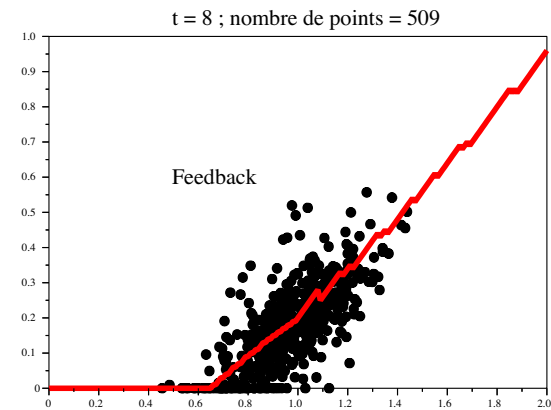
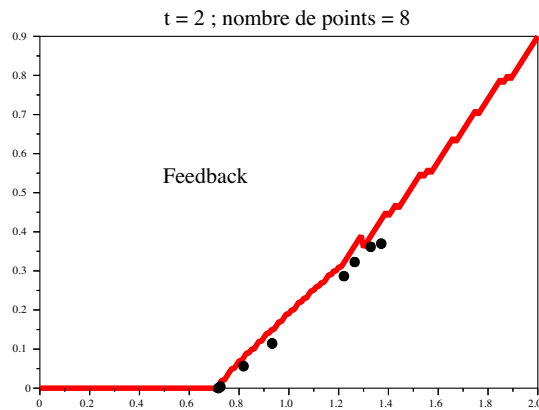


Questions en suspens

- Nombreuses possibilités de mise en œuvre du procédé de quantification.
- Qualité des résultats de l’optimisation dépendant **fortement** de cette mise en œuvre.
- Résultats **très différents** suivant le pas de temps où l’on se place.

ILLUSTRATIONS SUR UN PREMIER EXEMPLE (1)

Programmation dynamique versus chroniques arborescentes sur un problème markovien



Difficulté de synthétiser un bon feedback à partir des résultats de la méthode des chroniques . . .

ILLUSTRATIONS SUR UN DEUXIÈME EXEMPLE (2)

Sur un problème réaliste (approvisionnement, stockage et distribution sur le réseau national GdF à l'horizon annuel) avec un modèle mathématique suffisamment simple pour que l'on ait envie de l'utiliser comme plate-forme de test, on a comparé les méthodes de décomposition / coordination usuelles, tant du point de vue vitesse que du point de vue de l'influence de la taille du modèle sur le paramétrage de l'algorithme. Le "palmarès" est le suivant

1. **Prédiction de type point fixe**. Convergence assez rapide ; le paramétrage et le nombre d'itérations dépendent **peu** de la taille du problème.
2. **Lagrangien augmenté linéarisé**. Convergence rapide pour les problèmes de petite taille ; le paramétrage et le nombre d'itérations dépendent **beaucoup** de la taille du problème.
3. **Prédiction de type Arrow-Hurwicz**. Convergence rapide, présentant des oscillations haute fréquence (étude en cours de réalisation).
4. **Choix canonique du noyau de décomposition**. Convergence très lente.

ILLUSTRATIONS SUR UN DEUXIÈME EXEMPLE (3)

Pourquoi la prédiction ?

Dans le cas linéaire-quadratique (le seul pour lequel existe une preuve de convergence), notant :

- J l'opérateur (bloc-diagonal) définissant le coût,
- Θ l'opérateur (linéaire) original des contraintes couplantes,
- $\hat{\Theta}$ l'opérateur définissant les contraintes auxiliaires,

la condition de convergence sur la géométrie des interactions est : $\Theta J^{-1} \hat{\Theta}^\top > 0$.

Dans le problème précédent, la contrainte couplante a pour expression : $Su + Aq + w - d = 0$, d'où, en allouant la contrainte au sous-problème réseau : $\Theta = (S \ A \ I)$ et $\hat{\Theta} = (0 \ A \ I)$.

L'opérateur $\Theta J^{-1} \hat{\Theta}^\top = (A \ I) \tilde{J}^{-1} (A \ I)^\top$ est défini positif dans tous les cas.