

# Décomposition/coordination en optimisation : du cas déterministe au cas stochastique.

Pierre Carpentier

École Nationale Supérieure de Techniques Avancées



SOWG

23 novembre 2005

# Plan de la présentation

- 1 Introduction et problématique
- 2 Cas déterministe et extensions
- 3 Cas stochastique en boucle fermée
- 4 Conclusions

- 1 Introduction et problématique
  - Optimisation et complexité
  - Définition d'un grand système
  - Problème type
  - Objectif recherché
- 2 Cas déterministe et extensions
- 3 Cas stochastique en boucle fermée
- 4 Conclusions

La complexité d'un algorithme d'optimisation croît **plus vite que linéairement** avec la taille du problème à résoudre. Ainsi, dans l'exemple de la programmation dynamique (en temps discret) :

$$\min_{(u(0), \dots, u(T-1))} \sum_{t=0}^{T-1} L(x(t), u(t), t) + \Phi(x(T)) ,$$

sous les contraintes de dynamique :

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t) ,$$

la complexité de l'équation de calcul de la fonction valeur :

$$V(x, t) = \min_u [L(x, u, t) + V(f(x, u, t), t+1)] ,$$

croît **exponentiellement** avec la dimension de l'espace d'état  $x$ .

Système dont les caractéristiques sont telles que les algorithmes classiques de l'optimisation ne sont pas **directement** applicables.

**Impossibilité d'ordre méthodologique et non technologique.**

Nature des difficultés rencontrées.

- Aspect **spatial** :
  - grand nombre de variables,
  - sous-systèmes interconnectés,
  - hétérogénéité.
- Aspect **temporel** :
  - différentes échelles de temps,
  - rupture dans le comportement.
- Aspect **informationnel** :
  - plusieurs décideurs,
  - informations et objectifs différents.

Satisfaire une demande à l'aide de générateurs, à coût minimum :

$$\min_{(u_s(0), \dots, u_s(T-1))} \mathbb{E} \left[ \sum_{s=1}^S \left( \sum_{t=0}^{T-1} L_{s,t}(x_s(t), u_s(t), v_s(t)) + \Phi_s(x_s(T)) \right) \right], \quad (1a)$$

$$x_s(t+1) = f_{s,t}(x_s(t), u_s(t), w_s(t)) \quad \forall s \in \{1, \dots, S\}, \quad (1b)$$

$$\sum_{s=1}^S g_{s,t}(x_s(t), u_s(t)) = d(t) \quad \forall t \in \{1, \dots, T\}. \quad (1c)$$

Les dernières contraintes peuvent être incorporées dans le critère :

$$\sum_{t=1}^T \mathbb{E} \left[ \Psi_t \left( d(t) - \sum_{s=1}^S g_{s,t}(x_s(t), u_s(t)) \right) \right].$$

## Résoudre le problème par décomposition/coordination :

- formuler des sous-problèmes de taille plus petite (du point de vue de l'optimisation) : c'est la phase de **décomposition** ;
  - mettre en place un processus d'échange d'informations entre les sous-problèmes assurant que l'on résout bien le problème initial : c'est la phase de **coordination**.
- 
- Ce n'est pas une méthode d'approximation : on cherche à obtenir l'optimum global du problème initial.
  - La coordination est un processus itératif de type variationnel.
  - La décomposition permet de rendre les sous-problèmes homogènes et de les paralléliser.

Dans le problème (1), une décomposition spatiale est souvent souhaitée.

- 1 Introduction et problématique
- 2 **Cas déterministe et extensions**
  - Cadre général
  - Principe du problème auxiliaire
  - Cas avec contraintes explicites
  - Extensions
- 3 Cas stochastique en boucle fermée
- 4 Conclusions



## Problème à résoudre :

- $\mathcal{U}$  un espace de Hilbert dont le produit scalaire est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,
- $U^{\text{ad}}$  une partie convexe fermée non vide de  $\mathcal{U}$ ,
- $J$  une application définie sur  $\mathcal{U}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} J(u) . \quad (2)$$

Ce formalisme très général inclut les problèmes de type (1).

## Aspects “grand système” :

$$\mathcal{U} = \prod_{s=1}^S \mathcal{U}_s$$
$$J(u) = J(u_1, \dots, u_S)$$

$$U^{\text{ad}} = \prod_{s=1}^S U_s^{\text{ad}}$$
$$u_s \in U_s^{\text{ad}}$$

Un cas facile : la fonction  $J$  est **additive**.

$$J(u) = \sum_{s=1}^S J_s(u_s) \quad \rightsquigarrow \quad \min_{u_s \in U_s^{\text{ad}}} J_s(u_s) \quad \forall s \in \{1, \dots, S\} .$$

Cas général : utiliser la **différentiabilité** (plutôt que l'additivité), et remplacer la résolution de (2) par l'algorithme suivant :

- étant donné  $u^{(k)} \in U^{\text{ad}}$ , résoudre :

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} K^{(k)}(u) + \left\langle \epsilon \nabla J(u^{(k)}) - \nabla K^{(k)}(u^{(k)}), u \right\rangle, \quad (3)$$

- dont la solution  $u^{(k+1)}$  permet de formuler l'itération suivante.

Les noyaux  $K^{(k)}$  peuvent dépendre de l'itération  $k$  et **sont choisis** par le concepteur de l'algorithme : **point-clé pour la décomposition**.

## Démonstration intuitive du PPA.

Conditions d'optimalité de (2) :

$$\langle \nabla J(u^\#), u - u^\# \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U^{\text{ad}} .$$

Conditions d'optimalité de (3) :

$$\langle \nabla K^{(k)}(u^{(k+1)}) - \nabla K^{(k)}(u^{(k)}) + \epsilon \nabla J(u^{(k)}), u - u^{(k+1)} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U^{\text{ad}} .$$

Si  $u^{(k)} \rightarrow u^*$ , la différence entre les gradients de  $K^{(k)}$  s'annule :

$$\epsilon \langle \nabla J(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U^{\text{ad}} .$$

Les conditions d'optimalité de (3) se réduisent alors à celles de (2).

## Convergence :

- $J$  convexe, différentiable de dérivée lipschitzienne, coercive,
- $K^k$  fortement convexe, différentiable de dérivée lipschitzienne,
- $\epsilon$  "pas trop grand".

## Application à la décomposition :

avec des noyaux  $K^{(k)}$  **additifs** :

$$K^{(k)}(u) = \sum_{s=1}^S K_s^{(k)}(u_s),$$

le problème (3) se décompose en  $S$  sous-problèmes indépendants :

$$\min_{u_s \in U_s^{\text{ad}}} K_s^{(k)}(u_s) + \left\langle \epsilon \nabla_{u_s} J(u^{(k)}) - \nabla K_s^{(k)}(u_s^{(k)}), u_s \right\rangle.$$

On revient au problème (1) en oubliant les aspects aléatoires. 

Avec les notations :

- $U_s = (u_s(0), \dots, u_s(T-1))$  : commandes du générateur  $s$ ,
- $X_s = (x_s(1), \dots, x_s(T))$  : états du générateur  $s$ ,

le problème se met sous la forme compacte :

$$\min_{(X_1, U_1, \dots, X_S, U_S)} \sum_{s=1}^S J_s(X_s, U_s) + J_P(X_1, \dots, X_S, U_1, \dots, U_S) \quad (4a)$$

$$\text{sous } X_s = f_s(X_s, U_s) \quad \forall s \in \{1, \dots, S\}. \quad (4b)$$

On applique le principe du problème auxiliaire :

- en considérant les contraintes comme locales,
- en choisissant des fonctions  $K^k$  additives.

Expression implicite des contraintes :

$$(X_s, U_s) \in \mathcal{D}_s^{\text{ad}} \quad \forall s \in \{1, \dots, S\} .$$

Choix possible de noyaux additifs pour (4) :

$$K^{(k)}(X_1, \dots, X_S, U_1, \dots, U_S) = \sum_{s=1}^S J_s(X_s, U_s) .$$

Chaque sous-problème consiste à optimiser un seul générateur :

$$\min_{(X_s, U_s) \in \mathcal{D}_s^{\text{ad}}} J_s(X_s, U_s) + \langle \nabla_{X_s} J_P(X^{(k)}, U^{(k)}), X_s \rangle + \langle \nabla_{U_s} J_P(X^{(k)}, U^{(k)}), U_s \rangle .$$

Remarque : on a fait le choix  $\epsilon = 1 \rightsquigarrow$  termes quadratiques à ajouter...

## Expression développée du sous-problème du générateur $s$ :

$$\min_{\substack{(u_s(0), \dots, u_s(T-1)) \\ (x_s(1), \dots, x_s(T))}} \sum_{t=0}^{T-1} L_{s,t}(x_s(t), u_s(t)) + \Phi_s(x_s(T)) + \sum_{t=0}^{T-1} \langle \mu_s^{(k)}(t), u_s(t) \rangle + \sum_{t=1}^T \langle \nu_s^{(k)}(t), x_s(t) \rangle ,$$

sous les contraintes  $x_s(t+1) = f_{s,t}(x_s(t), u_s(t)) \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\}$ .

Les multiplicateurs  $\mu_s^{(k)}(t)$  et  $\nu_s^{(k)}(t)$  sont donnés par les relations :

$$\mu_s^{(k)}(t) = \nabla_{u_s(t)} \left( \Psi_t \left( d(t) - \sum_{j=1}^S g_{j,t}(x_j^{(k)}(t), u_j^{(k)}(t)) \right) \right) ,$$

$$\nu_s^{(k)}(t) = \nabla_{x_s(t)} \left( \Psi_t \left( d(t) - \sum_{j=1}^S g_{j,t}(x_j^{(k)}(t), u_j^{(k)}(t)) \right) \right) .$$

On considère le cas des contraintes **explicites** :

- $\mathcal{C}$  un deuxième espace de Hilbert,
- $\Theta$  une application définie sur  $\mathcal{U}$  à valeurs dans  $\mathcal{C}$ .

$$\min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} J(u) \quad \text{sous la contrainte} \quad \Theta(u) = 0. \quad (5)$$

Cas facile :  $J$  et  $\Theta$  **additives**.

$$\max_{\lambda \in \mathcal{C}} \min_{u_s \in \mathcal{U}_s^{\text{ad}}} \sum_{s=1}^S \left( J_s(u_s) + \langle \lambda, \Theta_s(u_s) \rangle \right).$$

A  $\lambda = \lambda^{(k)}$  fixé, le **lagrangien** est additif et l'étape de minimisation dans **Uzawa** se décompose en  $S$  sous-problèmes indépendants.



## Algorithme d'Uzawa dans le cas additif.

- Étant donné  $\lambda^{(k)} \in \mathcal{C}$ , calculer pour chaque  $s$  la solution  $u_s^{(k+1)}$  de :

$$\min_{u_s \in U_s^{\text{ad}}} J_s(u_s) + \left\langle \lambda^{(k)}, \Theta_s(u_s) \right\rangle . \quad (6a)$$

- Mettre à jour le multiplicateur  $\lambda$  :

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \rho \left( \sum_{s=1}^S \Theta_s(u_s^{(k+1)}) \right) . \quad (6b)$$

## Extension au cas général par le PPA.

- Étant donné  $\lambda^{(k)} \in \mathcal{C}$ , calculer pour tout  $s$  la solution  $u_s^{(k+1)}$  de :

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} K(u) + \left\langle \epsilon \nabla J(u^{(k)}) - \nabla K(u^{(k)}), u \right\rangle + \epsilon \left\langle \lambda^{(k)}, \Theta'(u^{(k)}) \cdot u \right\rangle . \quad (7)$$

- Mettre à jour le multiplicateur  $\lambda$  par la relation (6b).

## Développements autour du cas déterministe :

- répartition des contraintes entre les sous-problèmes (**décomposition par prédiction**),
- affaiblissement de l'hypothèse de différentiabilité,
- cas où la fonction  $J$  est simplement convexe (**lagrangien augmenté**).

Cas où la fonction  $J$  s'écrit comme l'espérance d'une fonction  $j$  :

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} \mathbb{E}[j(u, \xi)] . \quad (8)$$

On est alors dans le cas de la **boucle ouverte** : la **même** valeur de  $u$  s'applique **quelque soit** la valeur prise par la variable aléatoire  $\xi$ .

**Gradient stochastique** : on fait évoluer simultanément le calcul de l'espérance (**Monte Carlo**) et la méthode de descente (**gradient**).

- Effectuer un tirage **indépendant**  $\xi^{(k+1)}$  de la v.a.  $\xi$ .
- Remettre à jour la variable  $u$  par la relation :

$$u^{(k+1)} = \text{proj}_{U^{\text{ad}}} \left[ u^{(k)} - \epsilon^{(k)} \nabla_u j(u^{(k)}, \xi^{(k+1)}) \right] .$$

$\epsilon^{(k)}$  : suite de réels positifs qui converge **lentement** vers zéro.

On sait étendre le principe du problème auxiliaire à cette situation :

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} K(u) + \left\langle \epsilon^{(k)} \nabla_u j(u^{(k)}, \xi^{(k+1)}) - \nabla K(u^{(k)}), u \right\rangle .$$

## Résumons nous :

- En **statique** (cas déterministe et cas stochastique en boucle ouverte), on sait appliquer le Principe du Problème Auxiliaire à (presque) tous les problèmes classiques d'optimisation.
- On dispose de théorèmes de convergence indiquant sous quelles conditions on obtient l'optimum global du problème.
- On est capable d'effectuer la décomposition du problème en choisissant simplement des noyaux additifs.

- 1 Introduction et problématique
- 2 Cas déterministe et extensions
- 3 Cas stochastique en boucle fermée**
  - Notion de structure d'information
  - Cas de la programmation dynamique
  - Formalisation du problème sur l'espace des bruits
  - Gradient stochastique en boucle fermée
- 4 Conclusions

Problème de type (1) dans le cadre stochastique :



$$\min_{(u_0, \dots, u_{T-1})} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(x_t, u_t, w_{t+1}) + \Phi(x_T) \right], \quad (9a)$$

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t, w_{t+1}). \quad (9b)$$

On a masqué l'aspect grand système pour alléger les notations. . .

Ce problème n'est pas correctement formulé tant que l'on a pas précisé la **structure d'information**, c'est-à-dire la manière dont les variables  $u_t$  (que l'on optimise) dépendent des aléas  $w_t$ .

## Structure d'information du problème (9) :

- à chaque instant, une **observation** devient disponible :

$$z_t = b_t(x_t, w_t), \quad (10a)$$

- l'**information** à  $t$  est une fonction des observations passées :<sup>a</sup>

$$\begin{aligned} y_t &= c_t(z_0, \dots, z_t) \\ &= h_t(u_0, \dots, u_{t-1}, w_0, \dots, w_t), \end{aligned} \quad (10b)$$

- la commande ne dépend que de l'information disponible :

$$y_t^{(a)} = y_t^{(b)} \implies u_t^{(a)} = u_t^{(b)} \quad \text{soit :} \quad u_t = \varphi_t(y_t). \quad (10c)$$

---

<sup>a</sup>On suppose que l'information  $y_t$  "contient" au moins  $z_t$ .

## Problème :

l'optimisation se fait par rapport aux fonctions  $(\varphi_0, \dots, \varphi_{T-1})$ .  
Dès que l'information est non triviale, on est en **boucle fermée**.

## Un peu de terminologie :

- $z_t = x_t$  : observation parfaite de l'état.
- $z_t = w_t$  : observation parfaite du bruit.
- $y_t = z_t$  : information sans mémoire (feedback instantané).
- $y_t = (z_0, \dots, z_t)$  : mémoire parfaite.

**Décentralisation** :  $u_t = (u_{1,t}, \dots, u_{S,t})$ ,  $y_t = (y_{1,t}, \dots, y_{S,t})$  et  $u_{s,t} = \varphi_{s,t}(y_{s,t})$ .

**Décentraliser l'information  $\neq$  Décomposer les calculs.**

On se placera toujours dans le cas de l'information centralisée.



## Cas markovien pour le problème (9) :

- les variables  $x_t$  représentent l'**état** du système, et donc
- les aléas  $w_t$  sont **indépendants** (pas de dynamiques cachées),
- l'état  $x_t$  est parfaitement observé ( $z_t = x_t$ .)

On montre qu'il n'y a pas de perte d'optimalité à se restreindre aux **feedbacks instantanés** :  $u_t = \varphi_t(x_t)$ , et l'on sait faire les calculs.

Équation de la programmation dynamique en temps rétrograde :

$$V(x, T) = \Phi(x) ,$$

$$V(x, t) = \min_{u \in U^{\text{ad}}} \mathbb{E} \left[ L_t(x, u, \mathbf{w}_{t+1}) + V\left(f_t(x, u, \mathbf{w}_{t+1}), t + 1\right) \right] .$$

**Méthode inutilisable si  $\dim x > 3$  : malédiction de la dimension.**

Structure d'information classique : on est en dimension infinie.

- $z_t = b_t(x_t, w_t)$ ,
- $y_t = (z_0, \dots, z_t)$ .

On peut écrire une équation de la programmation dynamique, l'état étant alors la loi de probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}(x_t | y_t)$ .

Cas général : on ne sait le plus souvent rien faire...

Contre-exemple de Witsenhausen :

$$\begin{array}{llll} x_0 = w_0 & z_0 = x_0 & y_0 = z_0 & u_0 = \varphi_0(y_0) \\ x_1 = x_0 + u_0 & z_1 = x_1 + w_1 & y_1 = z_1 & u_1 = \varphi_1(y_1) \\ x_2 = x_1 - u_1 & & & \end{array}$$

$$\min_{(\varphi_0, \varphi_1)} \mathbb{E} [\alpha^2 u_0^2 + x_2^2] .$$

## Optimisation stochastique et décomposition/coordination.

**En optimisation déterministe**, les grandeurs pertinentes sont des **vecteurs**, et l'on peut les reconstituer à partir des **sous-vecteurs** provenant de la décomposition/coordination.

**En optimisation stochastique**, les grandeurs pertinentes sont des **lois de probabilité**, qu'on ne sait pas reconstituer si on ne dispose que des **lois marginales** (Figure 1).

## Décomposition de la programmation dynamique.

Comment calculer le **feedback optimal**  $u_{s,t} = \varphi_{s,t}(x_{1,t}, \dots, x_{S,t})$  à partir des **feedbacks locaux**  $u_{s,t} = \phi_{s,t}(x_{s,t})$  provenant d'une éventuelle méthode de décomposition/coordination ?

Problème ouvert. . .

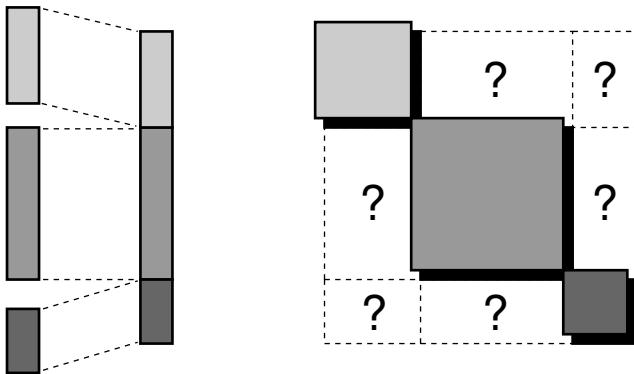


Figure: Décomposition déterministe (vecteur) et stochastique (matrice).

## Cas déterministe :

$$u : \mathcal{T} \longrightarrow \prod_{s=1}^S \mathcal{U}_s .$$

## Cas stochastique :

$$u : \mathcal{T} \times \prod_{s=1}^S \mathcal{X}_s \longrightarrow \prod_{s=1}^S \mathcal{U}_s .$$

On est passé d'une problématique dans laquelle on décompose l'**espace d'arrivée**  $\mathcal{U}$  des feedbacks (c'est-à-dire les applications composantes) à une problématique où il faut aussi décomposer l'**espace de départ**  $\mathcal{X}$  des feedbacks.

## Alternative à la programmation dynamique.

**Ne pas transporter la loi  $\mathbb{P}$**  sur l'espace d'état  $\mathcal{X}$  où on ne sait pas décomposer, mais **rester sur l'espace des bruits primitifs  $\Omega$**  et manipuler des vecteurs indexés par le temps **et** par le bruit.

Les décisions  $u_t(\omega)$  ne sont alors décomposées que par rapport à l'espace d'arrivée, soit  $(u_{1,t}(\omega), \dots, u_{S,t}(\omega))$  :

$$u : \mathcal{T} \times \Omega \longrightarrow \prod_{s=1}^S \mathcal{U}_s .$$

Dans ce contexte, les variables de commande  $u_t$  sont vues comme des **variables aléatoires  $u_t$**  suivant lesquelles on doit optimiser.

Prise en compte dans (9) de la structure d'information (10) :



$$\min_{(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{T-1})} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_{t+1}) + \Phi(\mathbf{x}_T) \right], \quad (11a)$$

$$\text{sous } \mathbf{u}_t \preceq \mathbf{y}_t \quad \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \quad (11b)$$

les variables aléatoires  $\mathbf{x}_t$  et  $\mathbf{y}_t$  étant définies par :

$$\mathbf{x}_t = f_t(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{w}_t)$$

$$\mathbf{y}_t = h_t(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_t) .$$

Questions.

- Le problème est-il bien posé ?
- Comment discrétiser le problème ?
- Comment obtenir des lois de feedback ?

## A propos de la mesurabilité.



Dire que la v.a.  $\mathbf{u}$  est **mesurable** par rapport à la v.a.  $\mathbf{y}$  :

$$\mathbf{u} \preceq \mathbf{y} ,$$

signifie l'**inclusion des tribus** engendrées par ces variables :

$$\sigma(\mathbf{u}) \subset \sigma(\mathbf{y}) .$$

L'information fournie par  $\mathbf{y}$  est **plus riche** que celle fournie par  $\mathbf{u}$ .


Ainsi, si la v.a.  $\mathbf{y}$  est constante sur un sous-ensemble  $\Omega_0$  de  $\Omega$  (et donc si  $\mathbf{y}$  ne permet pas de distinguer les différents éléments de  $\Omega_0$  entre eux), il en est **de même** pour la v.a.  $\mathbf{u}$ .



## Effet dual en optimisation stochastique.

**L'information "bouge" avec la commande** ; la commande sert à minimiser le critère ainsi qu'à améliorer l'information disponible.

$$\mathbf{y}_t = h_t(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_t) .$$

Voir le contre exemple de Witsenhausen. 

**Vision "discrète" de l'effet dual** : les contraintes d'information

$$\mathbf{y}_t(\omega) = \mathbf{y}_t(\omega') \implies \mathbf{u}_t(\omega) = \mathbf{u}_t(\omega') ,$$

se traduisent par des **contraintes d'égalité** entre les variables de décisions à l'instant  $t$ , contraintes entrant dans la **définition** du problème d'optimisation à résoudre. Or, l'**existence** même de ces contraintes dépend des commandes aux instants précédant  $t$ , soit de la solution du problème.

## Absence d'effet dual en optimisation stochastique.

**Cas que l'on sait traiter** : l'information à chaque instant  $t$  est la même pour toutes les commandes  $(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{T-1})$  admissibles.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= h_t(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_t) \\ &= h_t^{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_t) . \end{aligned}$$

$$\exists \bar{h}_t, \quad \forall \mathbf{u}, \quad \sigma\left(h_t^{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_t)\right) = \sigma\left(\bar{h}_t(\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_t)\right) .$$

**Caractérisation de ce cas** :

- propriété vérifiée sur les commandes en boucle ouverte,
- mémoire parfaite.

**Exemple canonique** : observation des bruits en mémoire parfaite.

Pour simplifier les notations, on va utiliser une **écriture compacte** du problème (9) :

**Problème :**

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbb{E}[j(\mathbf{u}, \xi)] . \quad (12a)$$

**Structure d'information :**

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{u}, \xi) \quad , \quad \mathbf{u} \preceq \mathbf{y} . \quad (12b)$$

L'absence d'effet dual est équivalent à l'existence d'une fonction  $\bar{h}$  ne dépendant que de  $\xi$  et "aussi informative" que toutes les  $h^{\mathbf{u}}$ .  
Notant  $\mathcal{B}$  la tribu engendrée par  $\bar{h}$ , la structure d'information (12b) du problème se met sous la forme :

$\mathbf{u}$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable.

On se place dans le cas sans effet dual.

Soient  $\mathbf{u}$  et  $\xi$  2 variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $\mathcal{U}$  et  $\Xi$  respectivement, et soit  $\mathcal{B}$  une sous-tribu **fixe** de  $\mathcal{F}$ .

$$V(\mathcal{B}, \mathbb{P}) = \min_{\mathbf{u} \text{ } \mathcal{B}\text{-mesurable}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [j(\mathbf{u}, \xi)] .$$

Première étape : discrétisation de l'information.

On **approxime** la sous-tribu  $\mathcal{B}$  par la sous-tribu  $\mathcal{B}_m$  engendrée par une **partition finie**  $(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$  de  $\Omega$ . Le problème est ramené à un nombre fini de problèmes en **boucle ouverte** :

$$V(\mathcal{B}_m, \mathbb{P}) = \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(\Omega_j) \min_{u_j \in \mathcal{U}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [j(u_j, \xi) \mid \Omega_j] .$$

## Deuxième étape : discrétisation de la loi de probabilité.

On prend une **approximation finie**  $\mathbb{P}_n$  de la loi  $\mathbb{P}$  (chaque  $\Omega_j$  contenant  $n_j$  atomes  $(\xi_{1,j}, \dots, \xi_{n_j,j})$  de poids respectif  $\pi_{i,j}$ ).

$$V(\mathcal{B}_m, \mathbb{P}_n) = \sum_{j=1}^m \min_{u_j \in \mathcal{U}} \left( \sum_{i=1}^{n_j} \pi_{i,j} \left( j(u_j, \xi_{i,j}) \right) \right).$$

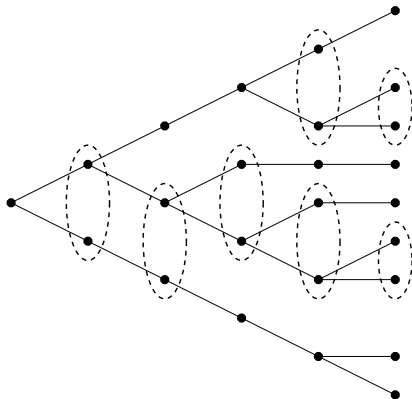
## Théorème de convergence.

- Hypothèses techniques sur la fonction  $j$
- $\mathbb{P}_n$  converge **en loi** vers  $\mathbb{P}$  (**Monte Carlo**).
- $\mathcal{B}_m$  est une suite de **sous-tribus** de  $\mathcal{B}$ .
- $\mathcal{B}_m$  converge vers  $\mathcal{B}$  (convergence ponctuelle de **Cotter**).

$$|V(\mathcal{B}_m, \mathbb{P}_n) - V(\mathcal{B}, \mathbb{P})| \leq |V(\mathcal{B}_m, \mathbb{P}_n) - V(\mathcal{B}_m, \mathbb{P})| + |V(\mathcal{B}_m, \mathbb{P}) - V(\mathcal{B}, \mathbb{P})|$$

## Application : la programmation stochastique.

Le problème discrétisé est posé sur un arbre de scénarios.



La décomposition/coordination se fait comme en déterministe.

## Rappel sur le gradient stochastique en boucle ouverte :

$$\min_{u \in U^{\text{ad}}} \mathbb{E}[j(u, \xi)] .$$

**Gradient classique** : on utilise le gradient de l'espérance :

$$u^{(k+1)} = \text{proj}_{U^{\text{ad}}} \left[ u^{(k)} - \epsilon \mathbb{E}[\nabla_u j(u^{(k)}, \xi)] \right] .$$

**Gradient stochastique** : on utilise  $\nabla_u j(u, \xi)$  en des valeurs de  $\xi$  :

$$u^{(k+1)} = \text{proj}_{U^{\text{ad}}} \left[ u^{(k)} - \epsilon^{(k)} \nabla_u j(u^{(k)}, \xi^{(k+1)}) \right] .$$

Les itérations servent à obtenir l'optimum **et** à calculer l'espérance.

$$\epsilon^{(k)} = \frac{\alpha}{k\gamma + \beta}, \quad \frac{1}{2} < \gamma \leq 1.$$

On repart du problème (12) :

$$\min_{\mathbf{u} \text{ } \mathcal{B}\text{-mesurable}} \mathbb{E}[j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})] ,$$

- $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\xi}$  sont 2 v.a. sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $\mathcal{U}$  et  $\Xi$ ,
- $\mathcal{B}$  est une sous-tribu **fixe** de  $\mathcal{F}$ . <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Cas de la **boucle ouverte** :  $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$  et la v.a.  $\mathbf{u}$  est **constante**.

On se place dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}; \mathcal{U})$ . Notant  $J(\mathbf{u}) = \mathbb{E}[j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})]$ , on a :

$$\nabla J(\mathbf{u})(\omega) = \nabla_{\mathbf{u}} j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})(\omega) = \nabla_{\mathbf{u}} j(\mathbf{u}(\omega), \boldsymbol{\xi}(\omega)) .$$

Dire que  $\mathbf{u}$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable est équivalent à dire :  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega, \mathcal{B}; \mathcal{U})$ ,  
 et l'algorithme de gradient projeté pour le problème (12) s'écrit :

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \text{proj}_{L^2_{\mathcal{B}}} \left[ \mathbf{u}^{(k)} - \epsilon \nabla J(\mathbf{u}^{(k)}) \right] .$$



Mise sous forme d'espérance et approximation du dirac (Figure 2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k+1)}(\omega) &= \text{proj}_{L^2_{\mathcal{B}}} \left[ \mathbf{u}^{(k)}(\omega) - \epsilon \nabla_{\mathbf{u}j}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\xi})(\omega) \right] \\ &= \text{proj}_{L^2_{\mathcal{B}}} \left[ \mathbf{u}^{(k)}(\omega) - \epsilon \mathbb{E} \left[ \nabla_{\mathbf{u}j}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\xi}) \delta_{\omega} \right] \right] \\ &\approx \text{proj}_{L^2_{\mathcal{B}}} \left[ \mathbf{u}^{(k)}(\omega) - \epsilon \mathbb{E} \left[ \nabla_{\mathbf{u}j}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\xi}) K_{\omega} \right] \right] . \end{aligned}$$

Application de la méthode du gradient stochastique :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k+1)}(\omega) &= \text{proj}_{L^2_{\mathcal{B}}} \left[ \mathbf{u}^{(k)}(\omega) - \epsilon^{(k)} \nabla_{\mathbf{u}j}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\xi})(\omega^{(k+1)}) K^{(k)}(\omega^{(k+1)}, \omega) \right] \\ &= \mathbf{u}^{(k)}(\omega) - \epsilon^{(k)} \nabla_{\mathbf{u}j}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\xi})(\omega^{(k+1)}) \text{proj}_{L^2_{\mathcal{B}}} \left[ K^{(k)}(\omega^{(k+1)}, \omega) \right] . \end{aligned}$$

La  $\mathcal{B}$ -mesurabilité est reportée sur le **choix** des noyaux  $K^{(k)}$ .

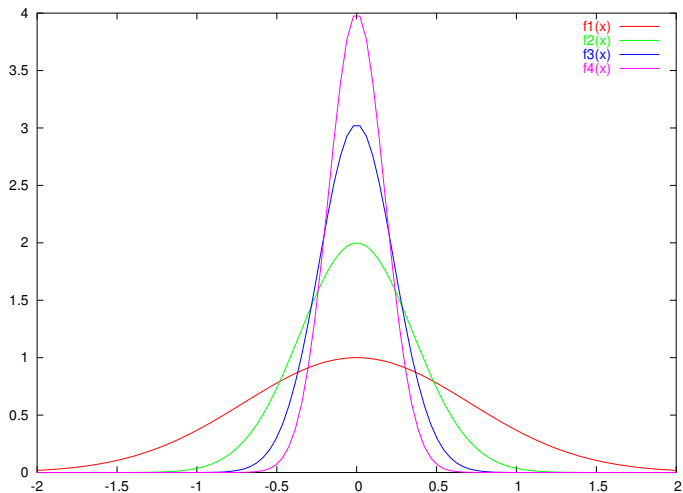


Figure: Approximation du Dirac  $\delta$  par :  $f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right)$ .

Choix de noyaux  $\mathcal{B}$ -mesurables de la forme  $\frac{1}{\gamma^{(k)}} K_{\mathcal{B}}^{(k)}$  :

$$\mathbf{u}^{(k+1)}(\cdot) = \mathbf{u}^{(k)}(\cdot) - \epsilon^{(k)} \nabla_{\omega} j(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\xi})(\omega^{(k+1)}) \frac{1}{\gamma^{(k)}} K_{\mathcal{B}}^{(k)}(\omega^{(k+1)}, \cdot),$$

- $\epsilon^{(k)}$  : **pas de l'algorithme** à l'itération  $k$ ,
- $\gamma^{(k)}$  : **largeur du support** du  $k$ -ème noyau.

Conditions de convergence sur les coefficients :

Les supports des noyaux "contiennent" de plus en plus de points :

- $\epsilon^{(k)} = \frac{1}{k}$ ,
- $\gamma^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

- 1 Introduction et problématique
- 2 Cas déterministe et extensions
- 3 Cas stochastique en boucle fermée
- 4 Conclusions**

## Que sait-on faire ?

- Programmation dynamique et décomposition/coordination : le mariage impossible. . .
- Typologies des problèmes d'optimisation stochastique.
- Point de vue numérique sur les problèmes sans effet dual.
- Point de vue variationnel sur ces problèmes (gradient).

## Directions de recherche.

- Discrétisation des problèmes d'optimisation stochastique.
- Principe du Problème Auxiliaire en optimisation stochastique.
- Principe du minimum en stochastique.
- Contraintes de risque – Contraintes en probabilité.

C'est fini !