

# Contrôle et Optimisation de trajectoire de mise en orbite GEO pour une mission Ariane 5

Ludovic Goudenège

ENSTA - Module MO102

Décembre 2016

# Plan

- 1 Modélisation du problème
- 2 Dynamique du vol
- 3 Calcul numérique des trajectoires
- 4 Optimisation des trajectoires

## Quelques chiffres

Un projet de type Ariane 5 met en jeu une charge lourde et un gros budget pour chaque décollage.

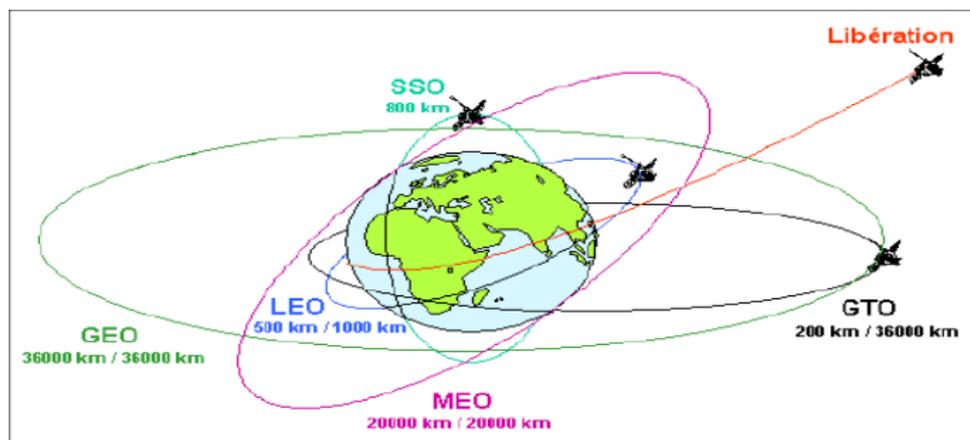
- 150 millions d'euros
- 10 tonnes de charge utile (2 satellites de 5 tonnes)
- 750 tonnes sur le pas de tir, dont 650 de carburant
- 25 minutes entre le décollage et la libération des satellites

Il est alors nécessaire d'optimiser la trajectoire de la fusée afin de minimiser les coûts principalement de carburant. On cherche alors à calculer le guidage optimal de la fusée afin d'atteindre l'altitude et la vitesse demandées pour la mise en orbite des satellites.

C'est un problème de commande optimale en grande dimension.

## Orbite géostationnaire (GEO)

L'orbite GEO est une orbite circulaire située à environ 36 000 km (c'est la plus peuplée avec environ 300 satellites). La principale particularité de cette orbite assure que le satellite reste immobile par rapport au sol terrestre.



Un lancement direct est difficile du fait de l'altitude élevée. On va réaliser un premier lancer sur une orbite de transfert (GTO) puis opérer une manoeuvre de circularisation.

## Modélisation du problème

On commence par écrire les équations du problème. Il faut prendre en compte la gravitation, la poussée des moteurs, la perte de masse due au carburant consommé et l'éjection des moteurs vides. Le vol est séparé en plusieurs phases qui dépendent du nombre de moteurs encore rattachés à la fusée.

En fin de vol, tout le carburant des moteurs a été consommé et le satellite utilise son propre carburant pour la procédure de circularisation. On ne prendra pas en compte cette étape. On cherche donc simplement à rejoindre l'orbite GTO.

Lorsqu'on possède les équations mise en oeuvre dans le mouvement, il reste une inconnue : c'est notre contrôle de la fusée. En effet la direction qu'on applique aux moteurs afin d'incliner la fusée durant son ascension est la seule donnée inconnue qu'on va chercher à optimiser.

## Modélisation du problème

On note  $erg$  la fonction décroissante de quantité de carburant (des ergols)

$$\begin{aligned} erg : [0, +\infty[ &\rightarrow [0, +\infty[ \\ t &\mapsto erg(t) \end{aligned}$$

Ainsi  $erg(0)$  est la quantité de carburant au décollage. On note  $T$  l'instant où tout le carburant a été consommé. C'est-à-dire l'instant où  $erg(T) = 0$ . La commande (un angle) notée  $c$  est une fonction continue du temps telle que

$$\begin{aligned} c : [0, +\infty[ &\rightarrow [-\alpha, \alpha] \subset [-\pi/2, \pi/2] \\ t &\mapsto c(t). \end{aligned}$$

On note  $F_c(t)$  la trajectoire de la fusée étant donnée une commande  $c$ .

$$\begin{aligned} F_c : [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto F_c(t) \end{aligned}$$

Mathématiquement cela revient à résoudre le problème suivant

$$\inf_{c \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[; [-\alpha, \alpha])} erg(0), \quad \text{sous la condition } F_c(T) \in GTO.$$

# Modélisation du problème

L'espace des fonctions continues étant de dimension infinie, et les équations complètement non-linéaires, on est face à un problème insoluble analytiquement.

On va donc simplifier le problème pour le ramener à un problème en très grande dimension mais accessible par résolution numérique.

De fait c'est la commande  $c$  qui doit être simplifiée, mais heureusement c'est notre facteur de contrôle. On peut tout à fait décider de n'autoriser que des commandes aux caractéristiques préalablement spécifiées, et donc se donner un espace de commande de la dimension qu'on souhaite.

# Modélisation du problème

On note  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([0, +\infty[; [-\alpha, \alpha])$  et  $\mathcal{C}_N$  un sous-espace de  $\mathcal{C}$  de dimension  $N$ . Il est clair que

$$\inf_{c \in \mathcal{C}} \text{erg}(0) \leq \inf_{c \in \mathcal{C}_N} e(0),$$

toujours sous la condition  $F_c(T) \in GTO$  pour  $c \in \mathcal{C}$  ou  $\mathcal{C}_N$ . On va donc chercher à prendre  $N$  suffisamment grand pour que les infimum soient assez proches. C'est un équilibre à trouver entre résolution possible du problème en temps raisonnable, et le coût  $\text{erg}(0)$  obtenu pour le lancement.

## Trajectoires admissibles

Toutefois il est numériquement très compliqué de résoudre ce problème de contrôle. La difficulté mathématique est cachée dans la CONTRAINTE

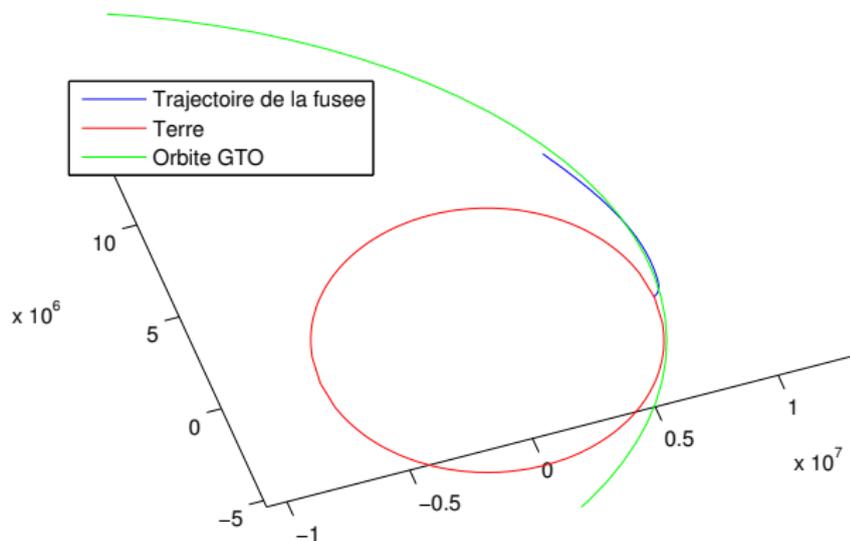
$$F_c(T) \in GTO,$$

car la trajectoire doit rejoindre “exactement” l’orbite GTO à l’instant  $T$ . En réalité, il reste toujours un peu de carburant, ne serait-ce que pour parer à certains imprévus en cours de vol, et on accepte des erreurs de positionnement sur l’orbite GTO.

On va donc se fixer un certain coût en carburant, et chercher s’il existe une commande qui permet de rejoindre approximativement l’orbite GTO. Afin de discriminer les trajectoires (et donc les commandes) admissibles, on introduit une mesure de qualité de la trajectoire obtenue.

## Exemple de résultats

On trace une trajectoire obtenue sur ordinateur. La fusée ne libère pas exactement les satellites sur l'orbite GTO. Il nous faut essayer d'optimiser la commande pour trouver une meilleure trajectoire.



## Trajectoires admissibles

Lorsque la fusée a épuisé tout son carburant, les satellites sont libérés au point  $F_c(T)$ . Soumis à la force gravitationnelle, ils suivent alors une trajectoire elliptique caractérisée par un demi-grand-axe  $a(F_c(T))$  et une ellipticité  $e(F_c(T))$ . Les paramètres optimaux sont notés  $a_{GTO}$  et  $e_{GTO}$ , et la mesure de qualité de la commande  $c$  est alors calculée par

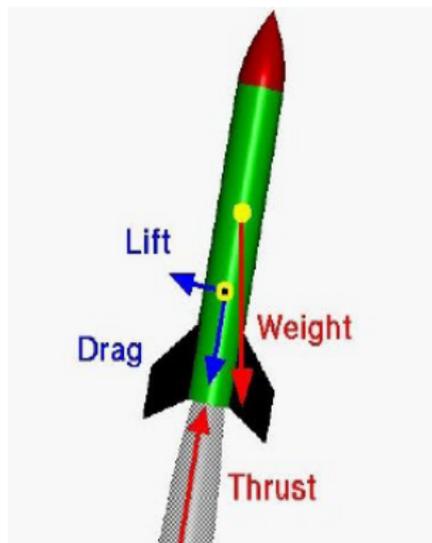
$$Q : \mathcal{C}_N \rightarrow [0, +\infty[ \\ c \mapsto \frac{(a(F_c(T)) - a_{GTO})^2}{a_{GTO}^2} + \frac{(e(F_c(T)) - e_{GTO})^2}{e_{GTO}^2}.$$

Le problème est maintenant le suivant

$$\inf_{c \in \mathcal{C}_N} Q(c).$$

On doit donc résoudre un problème d'optimisation **SANS** contrainte.

## Équations de la dynamique du vol

**Variables d'état**

$r$  : position (dimension 2 pour une trajectoire plane)

$v$  : vitesse (même dimension que  $r$ )

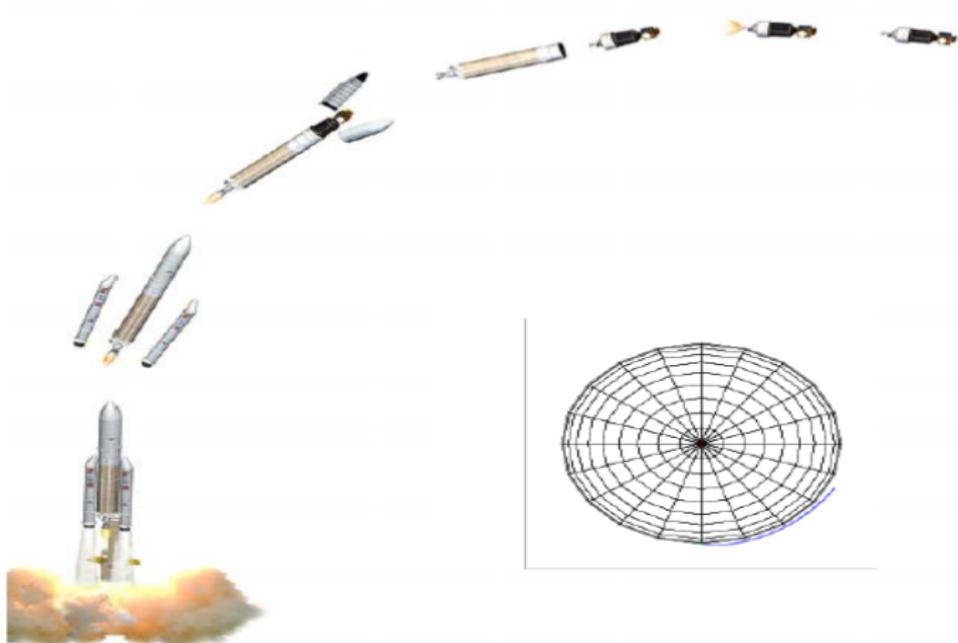
$m$  : masse (lanceur + carburant + satellites)

**Dynamique du vol**

$$(Eq) \begin{cases} \dot{r} = v \\ \dot{v} = (W + T)/m \\ \dot{m} = -d \end{cases}$$

$W$  : poids,  $T$  : poussée,  $d$  : débit de carburant.

# Séquence du vol



Un vol est donc constitué de 3 phases. Un vol avec les boosters et le premier étage en fonctionnement. Une deuxième phase avec seulement le premier étage. Et une troisième phase avec l'étage 2, jusqu'à la libération.

## Paramètres du lanceur

Pour une trajectoire plane le poids  $W$  et la poussée  $P$ , ce sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  définis par :

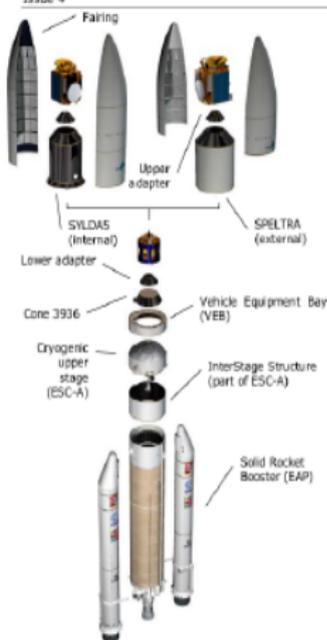
$$W = -\frac{\mu m}{\|r\|_2^3} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix}, \quad P = g_0 d \text{ isp} \begin{pmatrix} \cos(c) \\ \sin(c) \end{pmatrix},$$

où  $\mu$  est le paramètre gravitationnel standard ( $398\,600 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ ),  $g_0$  l'accélération de la pesanteur au sol ( $9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) et  $\text{isp}$  est l'impulsion spécifique du moteur (en secondes).

On donne les paramètres suivants :

|          | Masse | Poids ergols | $\text{isp}$ | Débit $d$ | Activation  |
|----------|-------|--------------|--------------|-----------|-------------|
| Boosters | 75t   | 500t         | 300s         | 4t/s      | Phase 1     |
| Étage 1  | 15t   | 150t         | 500s         | 0.3t/s    | Phase 1 & 2 |
| Étage 2  | 5t    | 15t          | 500s         | 0.015t/s  | Phase 3     |

## Structure du lanceur

Ariane 5 User's Manual  
Issue 4

Arianespace®

| LOAD                | SHOULDER  | SHOULDER  | SHOULDER |
|---------------------|---|-----------|----------|
| Height              | 5,415   | 1,81      | 1,45     |
| Weight              | 22,720 kg   | 12,820 kg | 2,7 kg   |
| Mass                | 2070 kg   | 2080 kg   | 2470 kg  |
| Structure           | Two halves - Sandwich CRP sheets and aluminum honeycomb core              |           |          |
| Acoustic protection | None (shells)   |           |          |
| Separation          | 100% CRP and vertical separation by lock-graft mechanical expanding tubes |           |          |

| LOAD         | SHOULDER                                   | SHOULDER   |
|--------------|--|--|
| Height       | 5,415                                      | 1,41   |
| Total height | 24,70                                      | 2,85   |
| Cone height  | 4,15 m                                     | 4,61 m   |
| Mass         | 738 kg                                     | 830 kg   |
| Structure    | Sandwich CRP sheets and aluminum honeycomb |  |
| Separation   | CRP  | Lock-graft mechanical expanding tube at the base |

| LOAD       | SHOULDER   |
|------------|--|
| Height     | 4,30 m   |
| Weight     | Total height of standard version: 4,903 m                        |
| Mass       | +0,34 (EAP) +0,34 (L2) +1,5 (m.e.v.) standard                    |
| Structure  | Sandwich CRP sheets and aluminum honeycomb                       |
| Separation | CRP  |
| Separation | Lock-graft mechanical expanding tube at the base of the cylinder |

| LOAD   | SHOULDER  |
|--------|-----------|
| Height | 10,10 m   |
| Weight | 11,000 kg |
| Mass   | 11,000 kg |

| LOAD      | SHOULDER                                     |
|-----------|--|
| Height    | 703 mm                                       |
| Weight    | 300 kg                                       |
| Structure | Reinforced CRP cone and glass fiber membrane |

| LOAD      | SHOULDER  |
|-----------|---|
| Structure | Sandwich CRP sheets and aluminum honeycomb core                               |
| Acoustic  | Right control, Right termination, power distribution and telemetry subsystems |

| LOAD                | SHOULDER  |
|---------------------|---|
| Height              | 5,415 m   |
| Weight              | 22,720 kg   |
| Mass                | 2070 kg   |
| Structure           | Two halves - Sandwich CRP sheets and aluminum honeycomb core              |
| Acoustic protection | None (shells)   |
| Separation          | 100% CRP and vertical separation by lock-graft mechanical expanding tubes |

| LOAD         | SHOULDER   |
|--------------|--|
| Height       | 5,415  |
| Total height | 24,70  |
| Cone height  | 4,15 m   |
| Mass         | 738 kg   |
| Structure    | Sandwich CRP sheets and aluminum honeycomb                                     |
| Separation   | CRP  |
| Separation   | Lock-graft mechanical expanding tube at the top of the ESC and 4-stage rockets |

| LOAD       | SHOULDER   |
|------------|--|
| Height     | 4,30 m   |
| Weight     | Total height of standard version: 4,903 m                        |
| Mass       | +0,34 (EAP) +0,34 (L2) +1,5 (m.e.v.) standard                    |
| Structure  | Sandwich CRP sheets and aluminum honeycomb                       |
| Separation | CRP  |
| Separation | Lock-graft mechanical expanding tube at the base of the cylinder |

| LOAD   | SHOULDER  |
|--------|-----------|
| Height | 10,10 m   |
| Weight | 11,000 kg |
| Mass   | 11,000 kg |

| LOAD      | SHOULDER                                     |
|-----------|--|
| Height    | 703 mm                                       |
| Weight    | 300 kg                                       |
| Structure | Reinforced CRP cone and glass fiber membrane |

| LOAD      | SHOULDER   |
|-----------|--|
| Structure | Sandwich CRP sheets and aluminum honeycomb core  |
| Acoustic  | Right control, Right termination, power distribution and telemetry subsystems, connected to VEB via data bus |

## Introduction

1-7

## Calcul de la trajectoire : Schéma d'Euler

Étant donnée une commande de guidage  $c$ , on cherche à résoudre l'équation (Eq) de la dynamique du vol. Or il existe des méthodes numériques pour résoudre n'importe quelle équation différentielle de degré 1. Il faut donc en premier lieu se ramener à une équation différentielle de degré 1 sous la forme :

$$(r, v, m) \text{ solution de (Eq)} \iff \begin{cases} \dot{z}(t) = f(t, z(t)), \\ z(t_0) = z_0. \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction à déterminer et  $z_0$  est la donnée initiale  $z_0 = (r_x(0), r_y(0), v_x(0), v_y(0), m(0))$ .

**Pour résoudre cette équation, on applique un schéma d'Euler.**

## Calcul de la trajectoire : Schéma d'Euler

$N$  : nombre de pas de discrétisation en temps. C'est la dimension de notre espace  $\mathcal{C}_N$ .

$h = \frac{t_{final} - t_0}{N}$  : taille du pas de discrétisation en temps.

$Z$  est un tableau de taille  $N + 1$ .

Initialisation :  $t = t_0$  et  $Z[0] = z_0$

Pour  $j = 1 \dots N$

$$Z[j] = Z[j - 1] + hf(t, Z[j - 1])$$

$$t = t + h$$

Fin

## Conditions initiale et finales

Conditions initiales : Pas de tir de Kourou.

La trajectoire est supposée plane, on choisit les axes de telle sorte que

$$r(t_0) = \begin{pmatrix} R_{Terre} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi R_{Terre}/T_{Terre} \end{pmatrix}$$

Conditions finales : orbite GTO

$$a_{GTO} = 24535135m, \quad e_{GTO} = 0.7185206032$$

Pour une libération à la distance  $r$  et à la vitesse  $v$ , le demi-grand-axe et l'ellipticité de la trajectoire des satellites sont donnés par les formules suivantes :

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\|r\|_2} - \frac{\|v\|_2^2}{\mu}, \quad e^2 = 1 + \frac{2pk}{\mu},$$

avec

$$p = \frac{(r_x v_y - r_y v_x)^2}{\mu} \quad \text{et} \quad k = \frac{\|v\|_2^2}{2} - \frac{\mu}{\|r\|_2}.$$

# Optimisation des trajectoires

Une fois qu'on sait résoudre le problème dynamique, on va donc chercher à optimiser la qualité de la trajectoire. Pour cela il faut optimiser la commande, c'est-à-dire trouver un algorithme qui permet d'améliorer la qualité.

On propose de mettre en oeuvre plusieurs algorithmes :

- méthode de gradient,
- apprentissage récursif,
- optimisation aléatoire,
- optimisation génétique.

## Structure du projet

- Calcul des durées des 3 phases.
- Définition des paramètres (masse, débit, isp) en fonction de  $t$ .
- Définition des forces (poids et poussées) en fonction de  $t$ ,  $r$  et  $c$ .
- Ecriture du schéma d'Euler pour une équation différentielle de degré 1 quelconque.
- Résolution de l'équation différentielle de degré 1 de la trajectoire du lanceur.
- Calcul de la mesure de qualité d'une trajectoire en fonction de la zone de libération.
- Visualisation graphique de la trajectoire.
- Optimisation du guidage pour obtenir une trajectoire de meilleure qualité.