

# Propagation d'ondes et holographie numérique

Karsten Plamann

karsten.plamann@ensta-paris.fr – 01.69.33.50.90

## Introduction

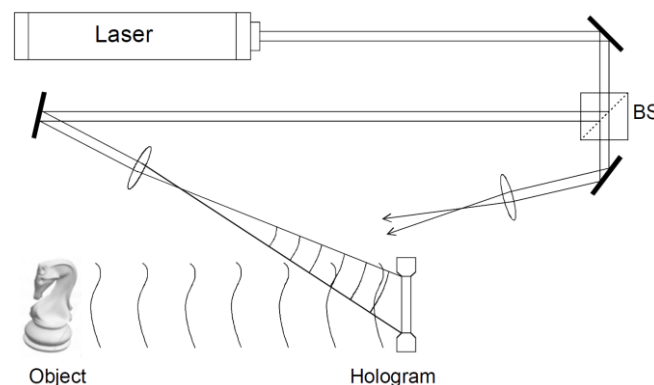


Figure 1 – Exemple d'un dispositif permettant l'enregistrement d'un hologramme<sup>1</sup>

De nombreux problèmes en sciences fondamentales et appliquées nécessitent le calcul de la propagation d'ondes linéaires. Pendant que les phénomènes physiques peuvent être très variés – imagerie optique, propagation du son, rayonnement électromagnétique, vibrations... – ils reposent sur un formalisme équivalent et peuvent être décrits par des équations fondamentales identiques ou au moins similaires. Le calcul numérique de propagations d'ondes peut être effectué par des méthodes de tracé de rayons ou par le calcul de la propagation d'un « front d'onde » en amplitude et en phase. Ce dernier peut faire appel à des algorithmes se basant sur la transformation de Fourier rapide (FFT) qui permettent le calcul du front d'onde avec un coût de calcul relativement faible. C'est notamment dans le cadre de l'holographie numérique – technique optique permettant l'enregistrement de fronts d'onde en amplitude et en phase par un détecteur uniquement sensible à l'intensité – que de majeures avancées ont été réalisées dans le domaine de la propagation numérique d'ondes.

Dans le cadre de ce projet MatLab nous proposons une courte introduction des bases théoriques et des principaux algorithmes. Les étudiant·es pourront ensuite choisir un problème de propagation d'ondes (diffraction aux fentes d'Young, simulation d'un haut-parleur, modélisation d'un dispositif d'holographie numérique...) et procéder à son implémentation en Matlab.

Ce projet permettra aux étudiant·es d'apprendre les bases du calcul numérique de propagation d'ondes, mais aussi des connaissances importantes concernant par exemple l'utilisation efficace de la FFT et d'autres méthodes du traitement du signal numérique.

<sup>1</sup> Schnars, Jueptner, Digital Holography, Springer Verlag, Berlin 2005. BS = beam splitter = séparateur de faisceau.

## Sommaire

Introduction.....	1
1 Propagation d'ondes électromagnétiques .....	3
1.1 Équations fondamentales.....	3
1.2 Principe de Huygens-Fresnel .....	4
2 Calcul numérique de la propagation d'une onde électromagnétique .....	5
2.1 Implémentation des algorithmes en une dimension .....	5
2.1.1 Méthode de la TFD unique (transformation de Fresnel) .....	5
2.1.2 Approches basées sur des convolutions numériques .....	6
2.1.3 Implémentation de la « lentille numérique ».....	7
2.2 Implémentation des algorithmes en trois dimensions.....	8
3 Traitement et reconstruction d'hogrammes numériques .....	9
3.1 Introduction.....	9
3.2 Création et reconstruction d'un hologramme synthétique .....	9
3.3 Reconstruction d'un hologramme numérique réel.....	12
4 Annexe : définition et syntaxe de <i>fft</i> et <i>ifft</i> .....	13
4.1 Utilisation correcte de la fonction <i>fftshift</i> .....	13
4.1.1 Définition et syntaxe .....	13
4.1.2 Calcul de la transformée de Fourier d'un rectangle.....	14

# 1 Propagation d'ondes électromagnétiques<sup>2</sup>

## 1.1 Équations fondamentales

Nos considérations se limiteront ici à des ondes électromagnétiques linéaires<sup>3</sup> qui se propagent dans un milieu isotrope<sup>4</sup> et homogène<sup>5</sup>, ne présentant pas de dispersion<sup>6</sup> ou de magnétisme<sup>7</sup>. Dans l'absence de charges libres, le champ électromagnétique est décrit par les équations de Maxwell sous la forme

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0.$$

Nous nous limiterons aux ondes monochromatiques<sup>8</sup> et donc cohérentes<sup>9</sup>, issues par exemple d'un laser continu en mode fondamental. Pour la description de la majorité des systèmes optiques on pourra de plus adopter l'approximation scalaire, c'est-à-dire faire abstraction de la nature vectorielle du champ et le représenter par une de ces coordonnées.<sup>10</sup> Pour toute coordonnée  $u$  du champ nous obtenons

$$\nabla^2 u - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

avec la vitesse de la lumière dans le vide  $c$  et l'indice de réfraction  $n = c/v$  mettant en relation la vitesse  $v$  de la lumière dans le milieu de propagation à  $c$ . Considérons la composante  $E_x$  du champ électrique et posons  $E_x = E \exp(-j\omega t)$ , où  $t$  et  $\omega$  sont respectivement le temps et la pulsation. Nous obtenons l'équation de Helmholtz

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)E = 0$$

avec le nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda = n\omega/c$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde.

---

<sup>2</sup> Pour réussir le présent projet Matlab il suffira de prendre acte des notions évoquées dans ce texte. Cette matière sera traitée en plus grand détail dans le cadre de l'enseignement thématique « Optique, photonique, lasers ». Notre présentation s'inspire d'un papier de Nicolas Verrier et Michael Atlan (*Applied Optics* **50** (34), 2011). D'autres références utiles sont : Ulf Schnars, Werner Jueptner, *Digital Holography*, Springer, Berlin 2005 ; Myung K. Kim, *Digital Holographic Microscopy*, Springer, Berlin 2001 ; Joseph W. Goodman, *Fourier Optics*, Roberts & Company Publishers, 3rd revised édition 2005.

<sup>3</sup> Linéarité : deux ondes électromagnétiques peuvent se superposer sans s'influencer.

<sup>4</sup> Isotropie : les propriétés sont indépendantes de la direction de propagation et de l'état de polarisation des ondes.

<sup>5</sup> Homogénéité : la permittivité  $\epsilon$  est constante dans la région de propagation.

<sup>6</sup> Absence de dispersion : la permittivité  $\epsilon$  est constante dans la bande des longueurs d'ondes considérées. (Poser cette contrainte n'est pas strictement nécessaire car nous limiterons nos considérations aux ondes monochromatiques.)

<sup>7</sup> Absence de magnétisme : la perméabilité  $\mu$  est égale à celle du vide :  $\mu = \mu_0$ .

<sup>8</sup> Monochromatisme : le champ ne contient qu'une seule longueur d'onde  $\lambda$ .

<sup>9</sup> Cohérence (temporelle et spatiale) : les phases du champ complexe de deux points ne diffèrent que d'une constante complexe.

<sup>10</sup> L'approximation scalaire n'est plus justifiée dans des situations de très forte focalisation de la lumière, par exemple par des objectifs de microscope puissants, ou à proximité de sauts d'indice de réfraction (voir plus loin dans le texte).

## 1.2 Principe de Huygens-Fresnel

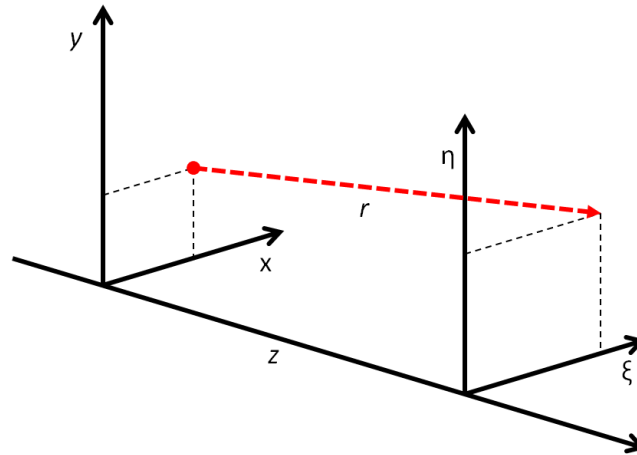


Figure 2 – propagation du plan  $(x, y)$  au plan  $(\eta, \xi)$  : système de coordonnées.

Considérons deux plans parallèles aux coordonnées  $(\eta, \xi)$  et  $(x, y)$  dans le système optique espacés de la distance  $z$  (voir figure 2). Il peut être démontré que le champ dans le plan  $(\eta, \xi)$  peut être calculé sous forme d'une superposition d'ondelettes sphériques élémentaires originaires de chaque point du plan  $(x, y)$  :

$$E(\xi, \eta) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \frac{e^{jkr}}{r} dx dy, \quad (*)$$

$c'$  est une des formulations du *principe de Huygens-Fresnel*. La distance  $r$  est donnée comme

$$r = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right],$$

où nous avons utilisé l'*approximation paraxiale*, obtenue par approximation binomiale, qui est valable quand  $z^3 \gg 1/8\lambda[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]$ . L'approximation consiste à remplacer les surfaces sphériques dans (\*) par des paraboles ; elle est valable quand les coordonnées latérales ne sont pas trop grandes comparées à la distance parcourue le long de l'axe optique  $z$ .

L'équation (\*) peut être réécrite comme

$$E(\xi, \eta) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) e^{j\frac{\pi}{\lambda z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]} dx dy. \quad (**)$$

Comme toutes les variables sont séparables dans (\*\*), nous allons d'abord procéder à la discrétisation pour le cas monodimensionnel. La *transformation de Fresnel*, en une dimension, est définie par

$$E(p) = \frac{\exp\left(\frac{j2\pi}{\lambda} z\right)}{\sqrt{j\lambda z}} \exp\left(j\frac{\pi \lambda z p^2}{N^2 \Delta x^2}\right) \sum_{n=0}^{N-1} E(n) \times \exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z} n^2 \Delta x^2\right) \exp\left(-j2\pi \frac{np}{N}\right) \Delta x, \quad (***)$$

où  $n\Delta x$  et  $p\Delta\xi$  représentent les coordonnées spatiales discrétisées dans les deux plans,  $E(p)$  et  $E(n)$  sont les champs correspondants et  $N$  est le nombre d'échantillons.

L'implémentation directe de l'équation (\*\*\*) engendrera un coût de calcul important. Nous montrons dans la suite qu'il est possible de concevoir des implémentations numériques plus efficaces basées sur des algorithmes de TFD rapide en réécrivant l'équation (\*\*).

Deux familles d'approches peuvent être distinguées : celles basées plus ou moins directement sur le principe de Huygens-Fresnel, calculant donc une superposition dans l'espace réel utilisant une seule TFD rapide, et celles calculant des convolutions en passant dans l'espace de Fourier utilisant deux ou trois TFD rapides.

## 2 Calcul numérique de la propagation d'une onde électromagnétique

### 2.1 Implémentation des algorithmes en une dimension

#### 2.1.1 Méthode de la TFD unique (transformation de Fresnel)

Réécrivons l'équation, dans sa forme monodimensionnelle, sous la forme suivante :

$$E(\xi) = \frac{e^{jkz}}{\sqrt{j\lambda z}} e^{j\frac{\pi}{\lambda z}\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E(x) e^{j\frac{\pi}{\lambda z}x^2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}x\xi} dx.$$

Nous pouvons donc la discrétiser sous la forme

$$E(p) = \frac{\exp(jkz)}{\sqrt{j\lambda z}} \exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}(p\Delta\xi)^2\right) \sum_{n=0}^{N-1} E(n) \exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}(n\Delta x)^2\right) \exp\left(-j\frac{2\pi}{\lambda z}n\Delta x p\Delta\xi\right) \Delta x.$$

Pour pouvoir nous appuyer sur les routines de TFD rapide, nous posons  $\Delta\xi = \lambda z/N\Delta x$  pour l'intervalle d'échantillonnage dans le plan ( $\xi$ ) et nous obtenons

$$E(p) = \frac{\exp(jkz)}{\sqrt{j\lambda z}} \exp\left(j\frac{\pi\lambda zp^2}{N^2\Delta x^2}\right) \sum_{n=0}^{N-1} E(n) \exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}(n\Delta x)^2\right) \exp\left(-j2\pi\frac{np}{N}\right) \Delta x \Rightarrow$$

$$E(p) = \frac{\exp(jkz)}{\sqrt{j\lambda z}} \exp\left(j\frac{\pi\lambda zp^2}{N^2\Delta x^2}\right) \mathcal{F}\left\{E(n) \exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}(n\Delta x)^2\right)\right\}.$$

Notez que la largeur du champ calculé doit être égale ou supérieure à celle du plan d'entrée pour éviter des phénomènes de repliement spectral. C'est le cas à partir d'une distance de calcul

$$z_{\min} = \frac{X_0^2}{N\lambda},$$

où  $X_0 = N\Delta x$  est la largeur du champ de départ.

#### Exercice 1 – diffraction par une fente

- Implémentez ce calcul en utilisant la fonction `fft` de Matlab.
- **Diffraction par une fente.** Calculez la distribution du champ en amplitude (ou intensité) et en phase derrière un écran d'une largeur de  $W = 1\text{mm}$  présentant une fente centrée de largeur de  $w = 100\mu\text{m}$  éclairé par onde plane  $E = E_0 \exp(jkz)$  avec une longueur d'onde de  $\lambda = 633\text{nm}$

pour différentes valeurs de la distance  $z$ . Commentez la stabilité numérique de la solution et la validité de l'approximation paraxiale.<sup>11</sup>

- Comparez vos résultats à ceux obtenus en utilisant une transformation de Fourier simple du champ en omettant le facteur quadratique de phase  $\exp\left(j\frac{\pi}{\lambda z}(n\Delta x)^2\right)$ . Commentez.

## 2.1.2 Approches basées sur des convolutions numériques

### 2.1.2.1 Algorithme de trois TFD (convolution de Huygens)

La propagation d'ondes électromagnétiques d'un plan à un autre dans un système optique peut être considérée comme système linéaire. L'équation (\*\*) peut être interprétée en tant que convolution spatiale de la distribution du champ avec la réponse impulsionnelle de Fresnel qui s'écrit en une dimension

$$h_z(x) = e^{j\frac{\pi}{\lambda z}x^2},$$

où nous avons omis la constante multiplicative. Une convolution dans l'espace correspond à une multiplication dans l'espace des fréquences et nous pouvons donc écrire

$$E(\xi) = \frac{e^{jkz}}{\sqrt{j\lambda z}} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{E(x)\} \times \mathcal{F}\{h_z(z)\}\}.$$

Pour des raisons similaires à celles évoquées pour la TFD unique, cette méthode fournit des résultats exploitables à partir d'une distance minimum  $z_{\min} = \frac{x_0^2}{N\lambda}$ .

#### Exercice 2

- Implémentez cette équation sous sa forme discrétisée en utilisant les fonctions `fft` et `ifft` de Matlab.
- Appliquez-la au problème de la diffraction par une fente.
- Comparez les résultats à ceux précédemment obtenus. Commentez.

#### Conseil 1

Il est bien connu que la fonction `fft` crée des résultats « symétriques » : les basses fréquences sont codées en début et en fin de vecteur. Souvent on ne présente que la moitié de ce vecteur, ou encore on utilise la fonction `fftshift` pour « faire joli » et présenter les spectres de façon centrée.

Dans le cas des problèmes traités au cours de ce projet Matlab où nous manipulons les données dans l'espace de Fourier il est important de correctement préparer le vecteur argument pour les fonctions

<sup>11</sup> Il vous sera utile de vous référer au « nombre de Fresnel »  $N_F = a^2/\lambda z$ , où  $a$  est une taille typique de l'ouverture diffractante, par exemple la mi-largeur  $w/2$  de la fente. En simplifiant on pourra dire : pour des grandes valeurs de  $F$  nous sommes en « champ proche » (ouverture grande par rapport à la distance) où les conditions nécessaires pour la validité de l'approximation paraxiale ne sont pas vérifiées. Pour des nombres de Fresnel de l'ordre de l'unité, nous sommes dans le régime de la diffraction de Fresnel. Pour des  $F$  petits, nous rentrons dans le régime de Fraunhofer dans lequel le champ diffracté se rapproche à une simple transformation de Fourier.

`fft` et `ifft` pour que ces opérations agissent sur les éléments corrects du vecteur du spectre. Souvent, les erreurs n'impactent pas l'amplitude des résultats ; par contre c'est notamment le calcul correct de la phase qui peut nécessiter l'utilisation de la fonction `fftshift` avant le passage dans l'espace de Fourier, ou avant de repasser dans l'espace réel.

### 2.1.2.2 Propagation du spectre angulaire

Cette méthode est basée sur le calcul explicite de la *fonction de transfert* du système. Considérons la transformée de Fourier  $\hat{E}(f_x) = \mathcal{F}\{E(x)\}$  du champ, où  $f_x$  est la *fréquence spatiale*. Nous pouvons écrire

$$E(\xi) = \frac{e^{jkz}}{\sqrt{j\lambda z}} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{E}(f_x) \times H(f_x)\},$$

où

$$H = \mathcal{F}\{h_z(z)\} \approx e^{jkz(\frac{1}{2}\lambda^2 f_x^2)}.$$

Nous avons donc

$$E(\xi) = \frac{e^{jkz}}{\sqrt{j\lambda z}} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{E(x)\} \times H(f_x)\}.$$

#### Exercice 3

- Implémentez cette équation sous sa forme discrétisée en utilisant les fonctions `fft` et `ifft` de Matlab.
- Appliquez-la au problème de la diffraction par une fente.
- Comparez les résultats à ceux précédemment obtenus. Commentez.

#### Conseil 2

Rappelez vous que pour un intervalle d'échantillonnage  $\Delta x$  dans l'espace réel vous obtenez un intervalle d'échantillonnage  $\Delta f_x = 1/N\Delta x$  dans l'espace des fréquences.

### 2.1.3 Implémentation de la « lentille numérique »

Nous notons que les méthodes présentées précédemment ne nous permettent pas de choisir le « grandissement »  $\gamma = \Delta\xi/\Delta x$ . La méthode de la TFD unique développée dans la section 2.1.1 a un grandissement fixe de  $\gamma = \lambda z/N\Delta x^2$ . Les méthodes basées sur des convolutions ont un grandissement unité. Il est possible d'ajuster le grandissement en utilisant une combinaison des deux méthodes : propager le front d'onde à un plan intermédiaire, puis utiliser l'autre méthode pour propager vers le plan souhaité. Il est également possible d'élargir la matrice de valeurs mesurées par des éléments valant zéro (*zero padding*) pour obtenir les dimensions souhaitées.

Une telle combinaison de deux méthodes et le rajout de données « vides » pourra sensiblement augmenter le coût de calcul.

Il est en effet possible d'implémenter une « lentille numérique » pour obtenir plus de souplesse. Avant la propagation, le front d'onde discrétisé est multiplié par un front de phase quadratique de forme

$$\mathcal{L}(x) = e^{-j\frac{\pi}{\lambda f}x^2},$$

où  $f$  est la « distance focale » de la lentille.

#### Exercice 4

- Implémentez la méthode de la « lentille numérique ».

## 2.2 Implémentation des algorithmes en trois dimensions

#### Exercice 5

- Étendez les codes précédemment développés à 2 dimensions. Utilisez les fonctions **FFT2** et **IFFT2**.
- Effectuez les calculs du champ pour le cas d'un trou de rayon  $r = 100\mu\text{m}$ .



### 3 Traitement et reconstruction d'hologrammes numériques

#### 3.1 Introduction

L'holographie est une méthode d'enregistrement et de reconstruction d'un front d'onde en amplitude et en phase qui a initialement été proposée par Dennis Gabor au cours des années 1940 et qui lui a valu le prix Nobel en 1971. En optique elle consiste à simultanément exposer un milieu d'enregistrement (un film photographique, une caméra ...) à une onde  $O(x, y)$  transmise ou réfléchiée par un objet et à une onde « de référence »  $R(x, y)$  de propriétés connues.

Le milieu d'enregistrement étant linéaire en intensité, le signal enregistré est donc proportionnel au module carré de l'amplitude et peut être exprimé sous la forme

$$I(x, y) = |R(x, y)|^2 + |O(x, y)|^2 + \overline{R(x, y)}O(x, y) + R(x, y)\overline{O(x, y)}.$$

Les troisième et quatrième termes à droite – les « termes croisés » – codent le front d'onde en amplitude et en phase et permettent sa reconstruction.

Dans le cas du film photographique, le film développé peut de nouveau être exposé à une onde de référence. Dans deux plans spécifiques, une image réelle de l'objet peut être captée ou une image virtuelle peut être observée, donnant l'impression d'une reconstruction « tridimensionnelle » de l'objet. L'holographie numérique basée sur des caméras CCD ou CMOS permet la reconstruction en amplitude et en phase de l'onde enregistrée par des moyens numériques en utilisant notamment des algorithmes de filtrage numérique et de transformation de Fourier discrète (TFD) rapide que nous étudierons au cours du module. De plus, les lois de propagation des ondes électromagnétiques étant bien connues, la méthode permet la reconstruction du front d'onde dans n'importe quel plan du système optique. Cette propriété a donné lieu à de nombreuses applications de l'holographie numérique en métrologie, microscopie, analyse de matériaux, ...

#### 3.2 Création et reconstruction d'un hologramme synthétique

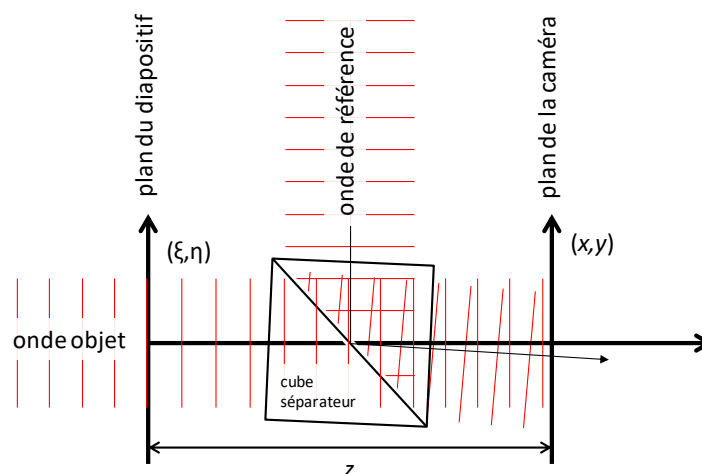


Figure 3 – géométrie d'enregistrement d'un hologramme numérique

La Figure 1 montre une géométrie typique pour l'enregistrement d'un hologramme numérique en transmission. Un diapositif de dimensions  $10 \times 10\text{mm}^2$  est placé dans le plan  $(\xi, \eta)$  correspondant à  $z = 0$ . Il est éclairé par une onde plane  $E = E_0 e^{jkz}$  avec une longueur d'onde  $\lambda = 633\text{nm}$ . Cette onde

est modifiée par la fonction transmittance<sup>12</sup>  $T(\xi, \eta)$  du diapositif :  $E(\xi, \eta)|_{z=+0} = E_0 \cdot T(\xi, \eta)$ . Une caméra CCD ou CMOS avec une surface sensible de  $10 \times 10\text{mm}^2$  et de  $1024 \times 1024$  pixel est placée à une distance de  $z = 30\text{mm}$ . Entre ces deux plans est positionné un *cube séparateur* (un cube en verre présentant un plan diagonal « semi-réfléchissant » qui transmet et réfléchit respectivement 50% de l'amplitude incidente.) Ce cube sert à superposer une *onde de référence* plane  $R(x, y)$  à l'onde  $O(x, y)$  provenant de l'objet. Son vecteur d'onde forme un angle  $\theta$  avec l'axe optique  $z$  :

$$R(x, y) = \sqrt{I_r} e^{jk(\sin \theta_1 x + \sin \theta_2 y)},$$

où  $I_r = |R|^2$  est l'intensité (constante) de l'onde de référence.

Il est important de veiller à ce que les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ne dépassent pas la valeur maximale

$$\theta \leq \theta_{\max} = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2\Delta x}\right),$$

où  $\Delta x = \Delta y$  est la taille des pixel, pour que la fréquence porteuse de l'interférogramme ne dépasse pas la fréquence de Nyquist du détecteur (expliquez !).

Le signal capté par la caméra est proportionnel à l'intensité incidente. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |R(x, y) + O(x, y)|^2 = |R(x, y)|^2 + |O(x, y)|^2 + \overline{R(x, y)}O(x, y) + R(x, y)\overline{O(x, y)} \\ &= I_r + |O(x, y)|^2 + \sqrt{I_r} e^{-jk(\sin \theta_1 x + \sin \theta_2 y)} O(x, y) + \sqrt{I_r} e^{jk(\sin \theta_1 x + \sin \theta_2 y)} \overline{O(x, y)}. \end{aligned}$$

Regardons les transformées de Fourier des quatre termes de cette équation.

1.  $\mathcal{F}\{I_r\} = I_r \delta(f_x, f_y)$ .
2.  $\mathcal{F}\{|O(x, y)|^2\} = \mathcal{F}\{C_r(O(x, y))\}$
3.  $\mathcal{F}\{\sqrt{I_r} e^{-jk(\sin \theta_1 x + \sin \theta_2 y)} O(x, y)\} = \sqrt{I_r} \cdot \delta\left(f_x + \frac{k \sin \theta_1}{2\pi}, f_y + \frac{k \sin \theta_2}{2\pi}\right) * \mathcal{F}\{O(x, y)\}$ .
4.  $\mathcal{F}\{\sqrt{I_r} e^{jk(\sin \theta_1 x + \sin \theta_2 y)} O(x, y)\} = \sqrt{I_r} \cdot \delta\left(f_x - \frac{k \sin \theta_1}{2\pi}, f_y - \frac{k \sin \theta_2}{2\pi}\right) * \mathcal{F}\{\overline{O(x, y)}\}$ .

Quoique le résultat puisse paraître encombrant, son interprétation est étonnamment simple.

1. La première expression est un pic de Dirac centré à  $f_x = f_y = 0$ .
2. La deuxième expression correspond à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de l'onde objet  $O(x, y)$ , centré à  $f_x = f_y = 0$ . Si on appelle  $B$  la largeur spectrale de  $\mathcal{F}\{O(x, y)\}$ , la largeur de ce terme est de  $2B$ .
3. La troisième expression correspond à la transformée de Fourier de l'onde objet, centrée en  $f_x = -k \sin \theta_1 / 2\pi$  et  $f_y = -k \sin \theta_2 / 2\pi$  ! Ce terme à une largeur de bande de  $B$ .
4. La quatrième expression correspond à la transformée de Fourier du complexe conjugué de l'onde objet, centrée en  $f_x = k \sin \theta_1 / 2\pi$  et  $f_y = k \sin \theta_2 / 2\pi$ . Ce terme à une largeur de bande de  $B$ .

---

<sup>12</sup> Dans notre cas, la fonction transmittance est réelle et peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 1. Certains modèles de diapositif proposés plus loin sont binaires et ne proposent que des valeurs 0 ou 1.

La Figure 1 montre la distribution de ces termes dans l'espace de Fourier. L'enregistrement de l'hologramme dans la configuration « hors axe », c'est-à-dire avec une onde de référence inclinée, nous a donc permis de séparer ces termes dans l'espace Fourier.

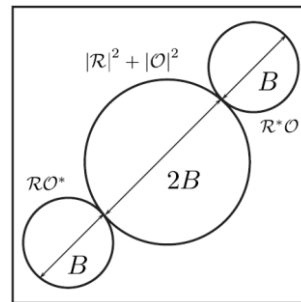


Figure 4 – schéma des termes observables dans la transformée de Fourier d'un hologramme numérique enregistré dans la configuration « hors axe ». <sup>13</sup>

La « recette » pour la reproduction du front d'onde dans le plan du diapositif est donc simple :

- Calculer la TFD du signal capté par la caméra ;
- Définir une zone d'intérêt centrée au centre de l'image virtuelle (par exemple) ;
- Calculer la TFD de cette zone d'intérêt ;
- Re-propager le front d'onde dans le plan du diapositif.

Il est possible de démontrer que la résolution de la reconstruction du front d'onde dans ce plan ne dépend que de la distance entre l'objet et la caméra, les dimensions latérales de la zone sensible de la caméra et du nombre de pixel disponibles. Notez que cette approche permet de capter une image d'un objet sans nécessiter l'utilisation d'un quelconque élément optique focalisant (lentille, objectif de microscope, miroir concave ...).

#### Exercice 6

- Utilisez un des fichiers graphiques fournis (ou un autre fichier de votre choix de format équivalent) pour modéliser le diapositif.
- Utilisez un des algorithmes de « propagation numérique » précédemment implémentés pour calculer l'onde objet au niveau de la caméra. Argumentez votre choix.
- Superposez cette « onde objet » par une « onde de référence » plane inclinée.
- Calculez l'image captée par la caméra.
- Calculez la transformée de Fourier discrète de cette image. Commentez sur les trois termes visibles.
- Choisissez une région d'intérêt autour de l'image réelle ou virtuelle.
- Propagez l'onde vers le plan de cette image et reconstruisez le front d'onde au niveau de  $z = 0$ .

<sup>13</sup> Figure reproduite de Verrier et Atlan, Applied Optics 50 (34), 2011.

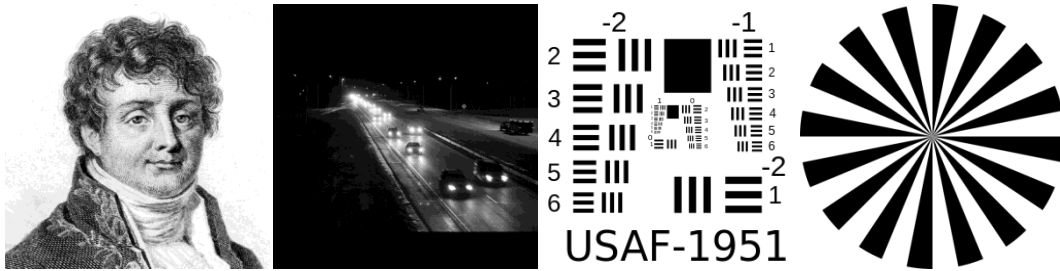


Figure 5 – exemples de fichiers graphiques fournis

### 3.3 Reconstruction d'un hologramme numérique réel

L'enseignant vous fournira un fichier de données d'un hologramme numérique enregistré en laboratoire de recherche avec les paramètres et conditions de son enregistrement.

#### Exercice 7

- Utilisez les codes précédemment développés pour reconstruire le front d'onde codé dans cet hologramme.

## 4 Annexe : définition et syntaxe de `fft` et `ifft`<sup>14</sup>

### 4.1 Définition et syntaxe de `fft` et `ifft`

`Y = fft(X)` et `X = ifft(Y)` calculent la transformation de Fourier discrète (TFD) et son inverse en utilisant un algorithme de transformation de Fourier rapide (« FFT » = *Fast Fourier Transform*) :

$$Y(k) = \sum_{j=1}^N X(j)W_N^{(j-1)(k-1)}$$
$$X(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y(k)W_N^{-(j-1)(k-1)}$$

avec

$$W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}.$$

- Si `X` est un vecteur, `fft(X)` retourne la transformée de Fourier du vecteur.
- Si `X` est une matrice, `fft(X)` traite les colonnes de `X` comme vecteurs et retourne la transformée de Fourier de chaque colonne.
- (Si `X` est un tableau multidimensionnel, `fft(X)` traite les valeurs le long de la première dimension dont la taille n'est pas égale à un comme vecteurs et retourne la transformée de Fourier de chaque vecteur).

### 4.2 Utilisation correcte de la fonction `fftshift`

#### 4.2.1 Définition et syntaxe

`Y = fftshift(X)` décale le premier élément d'un vecteur vers son centre en échangeant la première avec la deuxième moitié. Exemple :

```
X=1:10;  
Y=fftshift(X)
```

```
Y =  
     6     7     8     9    10     1     2     3     4     5
```

La fonction inverse est `ifftshift` :

```
Y=ifftshift(fftshift(X))
```

```
Y =  
     1     2     3     4     5     6     7     8     9    10
```

Attention : la double utilisation de la fonction `fftshift` produit des résultats erronés quand la longueur du vecteur est impaire :

```
X=1:9;  
Y=fftshift(fftshift(X))
```

---

<sup>14</sup> Voir aussi <http://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/fft.html>.

Y =

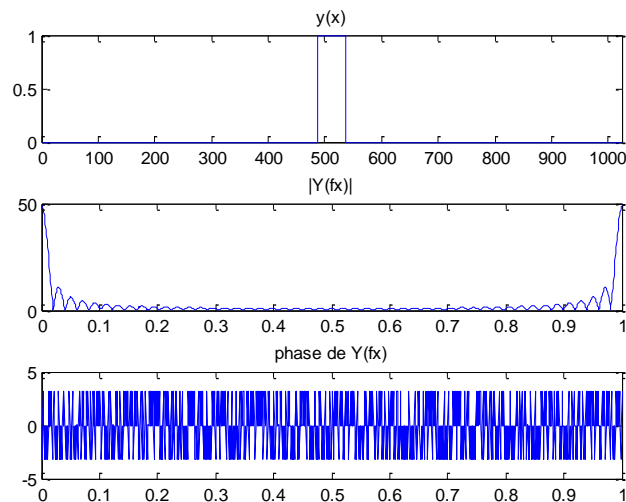
2 3 4 5 6 7 8 9 1

## 4.2.2 Calcul de la transformée de Fourier d'un rectangle

Le script `MO101_fftdemo_1.m` contient un script qui calcule la transformée de Fourier d'un rectangle.

```
N=1024;
w=25;
x=0:N-1; % définition du vecteur x
y=(x>N/2-w) & (x<N/2+w); % vecteur y = rectangle de largeur 2w
Y=fft(y); % calcul de la transformée de Fourier
fx=(0:N-1)/(max(x)-min(x)); % définition de l'axe des fréquences
% affichage des résultats
subplot(3,1,1), plot(x,y)
axis([0 N 0 1])
title('y(x)')
subplot(3,1,2), plot(fx,abs(Y))
title('|Y(fx)|')
subplot(3,1,3), plot(fx,angle(Y))
title('phase de Y(fx)')
```

Voici le résultat affiché :



Nous attendons un résultat sous forme d'une fonction de « sinc », centrée à  $f_x = 0$ .

Nous observons que la fréquence 0 correspond au premier élément du vecteur  $Y$  ; les fréquences basses sont codées dans la première partie du vecteur  $Y$  et les fréquences négatives dans la deuxième partie. Nous notons aussi que la phase oscille rapidement.

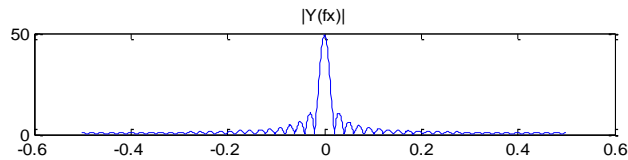
Pour procéder à un affichage centré sur la fréquence 0, nous pouvons utiliser la fonction `fftshift`,

```
subplot(3,1,2), plot(fx,abs(fftshift(Y)))
```

et redéfinir le vecteur  $f_x$  comme

```
fx=((0:N-1)-N/2)/(max(x)-min(x));
```

Nous obtenons le résultat souhaité :



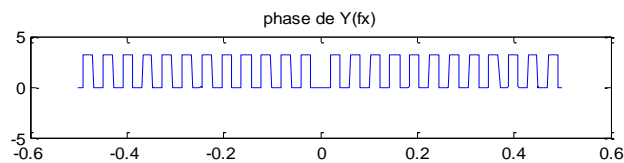
Nous avons donc changé la représentation du résultat du calcul qui montre désormais le résultat correct : la TF d'un rectangle est une fonction de sinc centrée à 0. Nous avons ici une situation typique : l'amplitude de la transformée est correctement calculée, ce qui suffira pour la grande majorité de problèmes faisant appel à la TF rapide. Néanmoins, la phase semble « poser problème ».

Pour un calcul correct de l'amplitude *et* de la phase il faut savoir que dans son argument, la fonction `fft` prend le premier élément du vecteur comme élément 0, suivi par les coordonnées positives et ensuite les coordonnées négatives dans la deuxième moitié du vecteur.

Dans le calcul présenté plus haut, Matlab a interprété le vecteur `y` comme un rectangle décalé par rapport à 0 dont la TF est en effet un sinc avec une phase modulée. Pour effectuer le calcul correct de la TF d'un rectangle centré à  $x = 0$ , il convient d'utiliser la fonction `fftshift` dans l'argument de la fonction `fft` :

```
Y=fft(fftshift(y));
```

La phase de `Y` est désormais calculée correctement : elle alterne entre les valeurs 0 et  $\pm\pi$  par demi-période.<sup>15</sup>



Vous trouvez le code corrigé dans le script `MO101_fftdemo_2.m`.

---

<sup>15</sup> Des légères fluctuations autour de ces valeurs sont dues aux limites de la précision numérique du calcul. Ceci peut causer des « sauts » entre valeurs proches de  $\pi$  et  $-\pi$ . Nous avons utilisé la fonction `plot(fx, angle(fftshift(Y)) + (angle(fftshift(Y)) < -0.1) * 2 * pi)` pour représenter toutes les valeurs en proximité de  $\pm\pi$  autour de  $+\pi$ .