MO102 - Utilisation de fonctions avancées

L'objectif de cette feuille d'exercice est de familiariser les élèves avec le maniement de deux types de fonctions très utiles dans beaucoup de domaines de la physique et des mathématiques appliquées. Il s'agit d'utiliser les intégrateurs temporels de MATLAB afin de pouvoir simuler des comportements dynamiques, puis de se familiariser avec les fonctions d'optimisation de MATLAB.

1 Intégration d'équations différentielles ordinaires

L'intégration d'équations différentielles ordinaires (EDO), dépendant par exemple du temps, est un outil utilisé dans toutes les branches de la physique, dès qu'il s'agit de simuler un comportement dynamique dont on veut prévoir le comportement, et pour lequel on dispose d'un modèle sous forme d'EDO. Les exercices de cette feuille ont pour vocation de vous montrer les méthodes existantes sous MATLAB, ainsi que de vous initier à lour programmation.

1.1 Le pendule non-amorti

La dynamique des oscillations d'un pendule non-amorti est gouvernée par l'équation :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \omega = 0, \tag{1}$$

où $\omega_0^2 = g/l$, avec g l'accélération de pesanteur (m.s^{-2}) et l la longueur du pendule (m). L'intégration temporelle de ce système consiste à calculer numériquement une *trajectoire* $\theta(t)$, partant d'une condition initiale : $\theta(t=0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$. Numériquement, cela se fait par des approximations des solutions selon des variantes de la méthode Runge-Kutta (méthode de discrétisation d'équation).

- A l'aide de la fonction MATLAB `ode23`, intégrer la dynamique linéarisée (*i.e.* pour des petits angles θ, tels que $\sin \theta = \theta$). On prendra par exemple $\omega_0 = 1$, $\theta_0 = .1$ et $\dot{\theta}_0 = 0$. Que constatez-vous ?
- Utiliser la fonction `ode45` pour intégrer le même système et tracer les erreurs numériques pour chacun des deux résultats obtenus. Effectuer une comparaison avec la solution analytique connue.
- Diminuer les tolérances d'erreur afin d'obtenir un résultat satisfaisant.
- Pour finir, intégrer la dynamique du pendule non-linéaire pour différentes conditions initiales.

1.2 Equation de Van der Pol

L'équation Van der Pol intervient dans de nombreux domaines de la physique (électronique, mécanique ainsi qu'écologie, économie, etc.). Elle s'écrit :

$$\ddot{x} + x - \mu(1 - x^2)\dot{x} = 0. \tag{2}$$

Elle a pour particularité d'avoir pour solution de base des cycles limites (trajectoires fermées dans l'espace des phases) au voisinage de l'origine instable. En effet, le terme non-linéaire joue le rôle d'un amortissement négatif pour les petites valeurs de x, alors que pour $x > 1$, on retrouve un comportement dissipant l'énergie.

- En utilisant les conditions initiales $x(0) = 0.2$ et $\dot{x} = 0$, programmer l'équation de Van der Pol et calculer des solution pour $\mu = 1$, $\mu = 3$ et $\mu = 6$. Représenter le déplacement pour chacune des simulation ainsi que $\dot{x}$ en fonction de x. Que remarquez-vous ?
- Calculer la solution avec $\mu = 1000$. Que se passe-t-il ?
- Utiliser l'intégrateur temporel : `ode15s`, spécialement programmé pour faire face à ce type de problème. Comparer alors les solutions fournies par les deux intégrateurs précédents ainsi que leur temps d'exécution (utiliser pour cela `tic` et `toc`).