

Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2002

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Orbium
Caelestium

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

Tout au long de ce problème, on considère une particule test de masse m , repérée par un point P , évoluant dans un système autogravitant de masse M , de centre O et à l'équilibre. A chaque instant la particule subit une force \vec{F} dérivant en totalité du potentiel gravitationnel ψ créé par le système. On suppose que $m \ll M$ et on négligera donc la force exercée par la particule sur le système. Le point sur une quantité désigne sa dérivée totale par rapport au temps $\dot{r} = dr/dt$.

On rappelle que pour tout $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ et pour toute fonction g acceptable (i.e. de classe C^2) ne dépendant que du module $r = \|\vec{r}\|$, le laplacien s'écrit

$$\Delta g = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right)$$

A - Potentiel central

1. Montrer que si le potentiel gravitationnel $\psi(r)$ ne dépend que de la distance $r = \|\vec{OP}\|$ (potentiel central), le mouvement de la particule s'effectue dans un plan que l'on caractérisera en fonction des coordonnées \vec{r}_o et des impulsions \vec{p}_o initiales.
2. Montrer que le lagrangien de la particule peut s'écrire

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 - m\psi(r)$$

où r et ϕ sont les coordonnées polaires dans le plan contenant le mouvement, et $\psi(r)$ le potentiel gravitationnel créé par le système de masse M .

3. En utilisant les équations de Lagrange, montrer que les grandeurs $l = L/m = r^2\dot{\phi}$ et $\varepsilon = E/m = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2 + \psi(r)$ sont des intégrales premières du mouvement.
4. Montrer que dans le cas d'un potentiel central, le système est à symétrie sphérique. A quelle condition sur ψ le système est-il de masse finie M_s ?
5. Montrer graphiquement que si $E < 0$ et si ψ est monotone, l'équation $\dot{r} = 0$ admet 0, 1 ou 2 racines $r_1 < r_2$.
6. Dans le cas d'une orbite avec 2 valeurs distinctes $r_1 < r_2$, on appelle période radiale τ_r le temps mis par la particule pour aller de r_1 à r_2 et revenir en r_1 . Soit

$$\tau_r = 2 \int_{t_1}^{t_2} dt = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{dr} dr$$

Montrer que d'une manière générale τ_r est une fonction de ε et de l^2 .

7. Que vaut τ_r pour un problème à 2 corps tel que $\varepsilon < 0$?
8. Donner la relation permettant de calculer la variation $\Delta\phi$ de l'angle polaire dans le plan orbital pendant le transfert de r_1 à r_2 .

B - L'amas homogène

On considère un système sphérique de rayon a de masse M_h et de densité constante ρ_o . Un tel système est dit homogène.

1. Calculer en tout point de l'espace et en fonction de M_h, G, a et r le potentiel gravitationnel ψ_h créé par ce système. On rappelle que ψ_h et sa dérivée sont des fonctions continues et dérivables, et que de plus

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d\psi_h}{dr} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \psi_h = 0$$

2. Ecrire, en coordonnées cartésiennes (x, y) dans le plan orbital, le lagrangien d'une particule test de masse m évoluant dans la région $r < a$ (on fera l'hypothèse a priori que la particule reste dans cette région, ce qui revient à imposer $\varepsilon < 0$). En résolvant les équations de Lagrange en variables (x, y) , montrer que $r(t)$ est périodique et que sa période τ_{rh} est indépendante des conditions initiales dans le plan orbital.
3. On suppose que $\varepsilon < 0$. Calculer l'énergie potentielle totale contenue dans le système en fonction de G, M et a (on pourra calculer la trace du tenseur potentiel).
4. En utilisant le théorème du viriel, montrer alors que τ_{rh} ne dépend que de ε, M, m, a mais pas de l .

C - L'amas isochrone

On considère un système sphérique de masse totale M_i créant un potentiel ψ_i tel que

$$s := -\frac{GM_i}{b\psi_i} = 1 + \sqrt{1 + \frac{r^2}{b^2}} \quad \text{avec } b > 0$$

un tel système est dit isochrone.

1. Montrer que si $r \ll b$, on peut trouver b en fonction de a , puis M_i en fonction de M_h pour que le potentiel ψ_i soit équivalent à celui qui règne à l'intérieur de l'amas homogène de masse M_h et de rayon a .
2. Montrer que si $r \gg b$, le potentiel de l'amas isochrone est équivalent à celui qui règne à l'extérieur d'un amas homogène de même masse.
3. On considère à présent une particule test en orbite dans un amas isochrone.
 - (a) Montrer que $r^2 = b^2 s (s - 2)$.
 - (b) Montrer qu'en variable s , l'équation $\dot{r} = 0$ admet en général deux racines s_1 et s_2 . Exprimer la somme et le produit de ces deux racines. (On ne demande pas d'explicitier s_1 et s_2)
 - (c) Montrer que la période radiale τ_r ne dépend que de ε .

Suggestion : quelques manipulations permettent de voir que sous réserves d'existence

$$\int_a^b \frac{(x-1)}{(x-a)^{1/2} (b-x)^{1/2}} dx = \pi \left[1 - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \right]$$

N.B. - Michel Hénon en 1959, démontra que le potentiel isochrone était le potentiel le plus général dans lequel τ_r ne dépend que de ε .