Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2005

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Une affaire de dimension

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

A - Quelques précisions

1. Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\overrightarrow{x}|^2} \, d\overrightarrow{x} \tag{1}$$

   Calculer I_2 en passant en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que $I_n = (I_1)^n$ et en déduire la valeur de I_n.

3. En passant en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin\theta_{n-1} ... \sin\theta_3 \sin\theta_2 \cos\theta_1 \\ x_2 &= r \sin\theta_{n-1} ... \sin\theta_3 \sin\theta_2 \sin\theta_1 \\ x_3 &= r \sin\theta_{n-1} ... \sin\theta_3 \cos\theta_2 \\ &... \\ x_{n-1} &= r \sin\theta_{n-1} \cos\theta_{n-2} \\ x_n &= r \cos\theta_{n-1} \end{aligned}$$

   avec

$$r = |\overrightarrow{x}| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

   et $\theta_1, ..., \theta_{n-1}$ les angles d'Euler de $\mathbb{R}^n$, on montre facilement que

$$I_n = |S_{n-1}| \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \tag{3}$$

   où $|S_{n-1}|$ représente la surface de l'hypersphère de dimension n.
   En utilisant le résultat de la question précédente calculer $|S_{n-1}|$. On rappelle à toutes fins utiles les propriétés de la fonction Γ d'Euler, $\forall z \in \mathbb{R}_*^+$

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{z-1} ds \ \ , \ \Gamma(1/2) = \pi^{1/2} \text{ et } \ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

4. On se limitera à présent au cas $n > 1$, et on considère l'opérateur laplacien en dimension n

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{4}$$

   montrer que pour toute fonction radiale de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & f(|\overrightarrow{x}|) := f(r) \end{array} \tag{5}$$

   on a

$$\begin{aligned} \Delta_n f &= \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{df}{dr} \qquad (6) \\ &= \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr}\left(\frac{df}{dr} r^{n-1}\right) \qquad (7) \end{aligned}$$

5. On appellera fonction de Green du laplacien radial, une fonction g_n radiale, telle que pour toute fonction radiale φ infiniment dérivable et à support compact

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{r \to +\infty} g_n(r) = 0 & \text{si } n > 2 \\ \lim\limits_{r \to +\infty} \frac{g_n}{r} \leq 1 & \text{si } n = 2 \end{array} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^n} g_n \, \Delta_n \left(\varphi \left(\overrightarrow{x} \right) \right) \, d\overrightarrow{x} = \varphi(0) \tag{8}$$

Il en résulte que g_n vérifie $\Delta_n g_n = \delta$.

Déterminer g_n (on ne pose pas la question de l'unicité).

Indications : on se souviendra du passage de (1) à (3) valable pour toute fonction radiale, on pourra utiliser (8) et la forme (7) de Δ_n , puis remarquer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{dr} dr = -\varphi(0)$$

B - Un joli théorème

On considère un volume fini Ω de $\mathbb{R}^n$, dans lequel une masse est répartie selon la densité $\rho\left(\overrightarrow{x}\right)$. On pourra faire l'hypothèse que cette densité est créée par N masses $(m_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq N}$ ponctuelles repérées par les vecteurs$(\overrightarrow{x_\alpha})_{1 \leq \alpha \leq N}$.

Si l'espace est isotrope, le potentiel gravitationnel créé par cette assemblée de charge est donné par la relation

$$\psi\left(\overrightarrow{x}\right) = k_n G \, \left(\rho \star g_n \right) \left(\overrightarrow{x}\right) = k_n G \int \rho\left(\overrightarrow{y}\right) g_n \left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\right) d\overrightarrow{y} \tag{9}$$

où G désigne la constante de Newton de la gravitation, g_n est la fonction de Green du laplacien radial de $\mathbb{R}^n$, $k_2 = 2\pi$ et $k_n = (n-2)\left|S_{n-1}\right|$ si $n > 2$.

On considère pour ce système, l'énergie cinétique totale

$$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \left(\frac{d\overrightarrow{x_\alpha}}{dt} \right)^2 \tag{10}$$

et l'énergie potentielle totale

$$U = \sum_{\beta=1}^{N} m_\beta \, \psi\left(\overrightarrow{x_\beta}\right) \tag{11}$$

1. Pourquoi, en dimension n la gravité est-elle représentée par le potentiel (9) ? On interprétera chacun des termes de (9).
2. On définit la valeur moyenne temporelle $\overline{f}$ d'une fonction $f\ \left(\overrightarrow{x}, t\right)$ par la relation

$$\overline{f}\left(\overrightarrow{x}\right) = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f\left(\overrightarrow{x}, t\right) dt$$

   Montrer que pour $n > 2$, il existe toujours une constante α_n que l'on déterminera, telle que $2\overline{T} + \alpha_n \overline{U} = 0$
3. Comment s'appelle le résultat précédent en dimension 3 ?
4. Que se passe-t-il en dimension 2 ?

C - Physique statistique autogravitante en dimension 2

Pour décrire un système autogravitant en dimension 2, on introduit sa fonction de distribution dans l'espace des phases $f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{p}\right)=f\left(\overrightarrow{w}\right)$. On définit alors le nombre de particules

$$N\left[f\right]=\int f\left(\overrightarrow{w}\right)d\overrightarrow{w} \tag{12}$$

l'énergie moyenne

$$E\left[f\right]=\frac{1}{2m}\int\overrightarrow{p}^{2}f\left(\overrightarrow{w}\right)d\overrightarrow{w}+\frac{1}{2}\int f\left(\overrightarrow{w}\right)\psi\left(\overrightarrow{x}\right)d\overrightarrow{w} \tag{13}$$

et l'entropie du système

$$S\left[f\right]=-\int f\left(\overrightarrow{w}\right)\ln\left(f\left(\overrightarrow{w}\right)\right)d\overrightarrow{w} \tag{14}$$

On montre alors qu'il existe un unique état d'équilibre correspondant au maximum de l'entropie sous les contraintes $N=cste$ et $E=cste$. Cet état est décrit par une fonction de distribution f^{+}de la forme

$$f^{+}=K.\exp\left[-\beta\left(\frac{\overrightarrow{p}^{2}}{2m}+\psi^{+}\left(\overrightarrow{x}\right)\right)\right] \tag{15}$$

où $\psi^{+}\left(\overrightarrow{x}\right)$ est le potentiel gravitationnel créé par cette distribution d'équilibre, K et β sont deux constantes.

1. À quoi correspondent les constantes K et β ?
2. On cherche à expliciter $\psi^{+}\left(\overrightarrow{x}\right)$.
   (a) Montrer que ψ^{+} vérifie l'équation différentielle

   $$\Delta_{2}\psi^{+}=\chi\ e^{-\beta\psi^{+}} \tag{16}$$

   où χ est une constante que l'on déterminera.
   Ce résultat permet entre autres d'affirmer que ψ^{+} radiale (on l'acceptera)

   (b) En posant $\beta\psi^{+}=2\ln\left(u\right)$ résoudre l'équation $\left(16\right)$.
3. Déduire du résultat précédent que la masse du système est finie (on ne demande pas d'expliciter cette masse).

Remarque : pour toute dimension supérieure à 2, la masse du système décrit par la fonction de distribution qui maximise l'entropie est infinie, ce qui contredit l'hypothèse $N\left[f^{+}\right]=cste$ et invalide l'approche « classique » de la thermodynamique statistique pour ce problème.

D - Question subsidiaire

On dispose d'un petit télescope équipé d'une caméra CCD et d'un spectromètre. Comment vérifier que les sections spatiales de notre espacetemps[1] sont de dimension 3 sur des échelles d'au moins quelques années-lumière ?

1. Comme cela est précisé dans l'ouvrage [?], cette notion mérite bien qu'on lui dédie un nom, même si les académiciens ne sont pas d'accord !