Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2007

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Mouvement d'une particule de masse variable dans un potentiel gravitationnel stationnaire

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen d'origine O. Une particule test de masse m, repérée par le vecteur $\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{r}$, évolue sous l'influence gravitationnelle d'une répartition massive $\mathcal{S}$ de masse totale finie M, à symétrie sphérique et de densité ρ. On suppose a priori que m est une fonction du temps t et de la distance $r = |\overrightarrow{r}|$, soit $m = m\left(r,t\right)$.

1. Ecrire l'équation du mouvement vérifiée par le vecteur $\overrightarrow{r}$.

   Indication : On supposera d'une part, que la particule test ne modifie pas la répartition massive $\mathcal{S}$ et d'autre part, que la force qui lui est imposée dérive en totalité de l'énergie potentielle $U = m\psi$ où ψ est le potentiel gravitationnel associé à ρ.

2. Dans quelles conditions sur la fonction $m\left(r,t\right)$, le lagrangien de la particule est-il donné par la relation
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right)^2 - m\psi \qquad ?$$

3. Vérifier que, dans le cas képlérien où $\rho_k = M\ \delta\left(\overrightarrow{r}\right)$, on retrouve bien l'équation de Newton
$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\overrightarrow{r}}{r}$$

4. Quelles sont les grandeurs conservées au cours du mouvement dans les cas $m = m\left(r,t\right)$, $m = m\left(r\right)$, $m = m\left(t\right)$ et $m = cste$?

5. On suppose maintenant que $m = m_o e^{-t/\tau}$ où m_o et τ sont deux réels strictement positifs. On suppose de plus qu'à $t = 0$, la particule se trouve *à l'intérieur* de la répartition $\mathcal{S}$ que l'on suppose homogène, c'est-à-dire telle que $\rho = cste = 3\omega^2\left(4\pi G\right)^{-1}$ où ω est une constante réelle et G la constante de Newton.

   (a) Montrer que la répartition de masse à densité constante est forcément limitée à un certain rayon r_h que l'on déterminera.

   (b) Déterminer le potentiel gravitationnel qui règne à l'intérieur de cette région.

   (c) Montrer que, quelles que soient les valeurs de τ, m_o, ω et de la vitesse initiale, il existe un temps fini t_m pour lequel la particule quitte la région à densité constante.

   Indication : on pourra étudier le comportement des solutions en coordonnées cartésiennes dans un plan judicieux - On ne demande pas la valeur explicite de t_m.

   (d) Interpréter physiquement ce résultat.

Formulaire

Pour une fonction radiale telle que $\varphi\left(\overrightarrow{r}\right) = \varphi\left(r\right)$ avec $\overrightarrow{r} \in \mathbb{R}^3$, on rappelle les identités bien connues
$$\mathrm{grad}\left(\varphi\left(r\right)\right) = \frac{d\varphi}{dr}\frac{\overrightarrow{r}}{r} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left(\varphi\left(r\right)\right)\right) = \Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)$$