Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2008

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Équations planétaires, mouvements classiques du périastre, application à Mercure

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

Une particule de masse m repérée dans un référentiel galiléen par le vecteur $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r}$ évolue dans une région $E = \{\overrightarrow{r} \in \mathbb{R}^3,\ |\overrightarrow{r}| > |\varepsilon|\}$ dans laquelle règne le potentiel

$$\psi(r) = -\frac{GM}{r}\left[1 + \frac{\varepsilon}{k+1}\left(\frac{r_o}{r}\right)^k\right] \tag{1}$$

où G est la constante de gravitation, M et r_o sont homogènes respectivement à une masse et à une distance, k et ε sont des nombres réels.

A - Préliminaires

1. Calculer la force subie par la particule en chaque point de E.
2. Calculer la densité de masse ρ associée au potentiel ψ. En déduire le signe de ε. On rappelle que pour toute fonction radiale ϕ de R^3 dans R,
$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right)$$
3. Dans quel intervalle doit varier k pour que la source du potentiel ψ ait une masse totale finie ?

B - Orbite osculatrice

On souhaite étudier l'orbite de la particule de masse m dans le potentiel ψ à l'aide de la théorie planétaire de Lagrange. On considère les éléments osculateurs elliptiques $\{a(t), e(t), i(t), \omega(t), \Omega(t), \tau(t)\}$.

1. A quelle condition la théorie planétaire de Lagrange est-elle a priori applicable à ce problème ?
2. Montrer que le potentiel perturbateur s'écrit
$$R = \mu\frac{\varepsilon}{r(k+1)}\left(\frac{r_o}{r}\right)^k \qquad \text{avec } \mu = GM \tag{2}$$
3. Montrer que i et Ω sont constants au cours du mouvement.
4. Montrer que le paramètre focal $p = a(1-e^2)$ de l'ellipse osculatrice est lui aussi constant.
On s'intéresse à présent à la partie séculaire des perturbations en considérant le potentiel perturbateur séculaire
$$\overline{R} = \frac{1}{T}\int_0^T R\, dt \tag{3}$$
où T est la période osculatrice.
5. Montrer que l'on peut écrire
$$\overline{R} = \frac{\mu p n \varepsilon}{2\pi C(k+1)}\left(\frac{r_o}{p}\right)^k f_k(e) \tag{4}$$
où l'on a introduit $n = 2\pi T^{-1} = \sqrt{\mu}a^{-3/2}$, $C = \sqrt{p\mu}$ et $f_k(e)$ une fonction que l'on déterminera.
6. Calculer explicitement $f_k(e)$ pour $k = 1, 2, 3$ et 4, et donner un développement limité à l'ordre 2 de $f_k(e)$ pour e proche de 0.
7. On approxime dorénavant $f_k(e)$ par son développement limité à l'ordre 1 pour e proche de 0. Montrer que le périastre du mouvement séculaire osculateur évolue à vitesse constante n_ω et déterminer l'avance du périastre par période
$$\Delta\omega = n_\omega T = 2\pi\, n_\omega\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \tag{5}$$

C - Avance du périhélie de Mercure

On a constaté depuis longtemps que le mouvement de la planète Mercure présentait une avance de son périhélie d'environ 43 secondes d'arc par siècle. Nous allons tenter de voir si cette avance est imputable à l'aplatissement du Soleil.

1. On considère que le Soleil est un sphéroïde de révolution aplati aux pôles avec

$$\frac{r_e - r_p}{r_e} = 5 \times 10^{-7} \tag{6}$$

   où r_e et r_p représentent respectivement le rayon équatorial et polaire du Soleil. Calculer le J_2 du Soleil.
   Indication : si $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\right\}$ alors

$$\iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right) = \frac{1}{5}\left(b^2 + c^2\right) \tag{7}$$

2. On considère que la planète Mercure évolue dans le plan équatorial du Soleil. Montrer que l'on peut choisir M, k, ε et r_o pour que le potentiel de l'équation (1) soit celui créé par un Soleil aplati aux pôles.
3. Calculer l'avance du périhélie de Mercure causée par l'aplatissement du Soleil. Qu'en déduisez-vous ?

   Applications numériques :
   Orbite de Mercure : $a = 0,387$ ua, $e = 0,206$, 1ua = 149 597 871 km
   Soleil : $r_e = 1,39 \times 10^6$ km, $M_\odot = 1,9 \times 10^{30}$ kg
   Constante de la gravitation : $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$