Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation
Décembre 2009

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Harcèlement entre polytropes

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

Une équation d'état relie les fonctions d'état d'un système thermodynamique. Parmi l'ensemble des possibles, un cas très intéressant est celui des polytropes pour lesquels la pression P et la densité volumique de masse ρ sont reliées par l'équation

$$P = k\ \rho^{\gamma}. \tag{1}$$

La constante k est spécifique au système considéré et la constante γ positive est souvent notée $\gamma = 1 + \dfrac{1}{n}$ pour faire apparaître l'indice polytropique n.

1− On considère un système sphérique pour lequel P et ρ ne dépendent que de la coordonnée radiale r. On note ψ le potentiel gravitationnel du système, et on pose $\phi = \psi_\infty - \psi$ où ψ_∞ est une constante. Montrer qu'à l'équilibre hydrostatique, on a la relation

$$\rho = K\ \phi^n \tag{2}$$

On exprimera K en fonction de k et n. Que représente la constante ψ_∞ ?

2− En introduisant un paramètre caractéristique adapté, noté a, et la variable $x = r/a$, montrer que le potentiel gravitationnel d'un système polytropique à l'équilibre est solution de l'équation de Lane-Emden

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d\phi}{dx} + \phi^n = 0 \tag{3}$$

On rappelle, à toutes fins utiles, l'expression de la partie radiale du laplacien en dimension 3 d'une fonction radiale $u\,(r)$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{du}{dr}\right]$$

3− Montrer qu'il existe une valeur du réel α pour laquelle l'équation de Lane-Emden est invariante par l'homothétie

$$(\phi, x) \to (\lambda\phi, \lambda^\alpha x) \tag{4}$$

Cette symétrie permet d'introduire le changement de variable $t = \ln x$ et de fonction $y\,x^{\frac{1}{\alpha}} = \phi$ grâce auquel l'équation de Lane-Emden devient

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{5-n}{1-n}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{6-2n}{(1-n)^2}y + y^n = 0 \tag{5}$$

Pour quelle valeur particulière de n différente de 0 ou 1, cette équation possède-t-elle une solution explicite ? Indiquer *brièvement et sans l'utiliser*, la méthode que vous mettriez en œuvre pour déterminer cette solution. La solution correspondante s'appelle le modèle de Plummer, le potentiel gravitationnel associé est

$$\psi\,(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + a^2}}\ . \tag{6}$$

On ne demande pas de démontrer cette formule même si un calcul bien mené permet de le faire à partir de l'équation (5). Ce modèle comporte deux paramètres que sont sa masse totale M et sa taille caractéristique a. Il constitue un bon modèle théorique pour les amas globulaires et certaines galaxies.

4− Montrer sans trop de calculs que la masse d'un modèle de Plummer est finie alors que son extension spatiale est a priori infinie.

5– Déterminer la masse $\mu(r)$ contenue dans une sphère de rayon r ayant le même centre qu'un modèle de Plummer de paramètres a et M. On considère le rayon r_θ tel que $\mu(r_\theta) = \dfrac{M}{\theta^3}$ avec $\theta \geq 1$. Exprimer r_θ en fonction de a et de θ. On pourra utiliser l'identité

$$\begin{aligned}\left(1 - B^3\right) x^3 + 3Ax^2 + 3A^2x + A^3 = &\left[A - x\left(B-1\right)\right] \\ &\left[\left(1 + B + B^2\right) x^2 + A\left(2 + B\right) x + A^2\right]\end{aligned}$$

Déterminer en fonction de a la valeur des rayons R_c et R_t des sphères contenant respectivement 35% et 85% de la masse totale d'un modèle de Plummer.

On considère à présent un amas globulaire évoluant dans le champ gravitationnel d'une galaxie. Ces deux objets seront représentés par des modèles de Plummer de paramètres adaptés :

$$\psi_g(r) = -\frac{GM_g}{\sqrt{r^2 + a_g^2}} \text{ pour la galaxie et, } \psi_c(\rho) = -\frac{GM_c}{\sqrt{\rho^2 + a_c^2}} \text{ pour l'amas.}$$

La variable r désigne la distance au centre de la galaxie et la variable ρ la distance au centre de l'amas. On souhaite étudier les effets de marée subis par l'amas et causés par le champ gravitationnel de la galaxie. Pour simplifier les calculs, on supposera que l'amas est en orbite circulaire de rayon a_g dans le champ gravitationnel de la galaxie. À chaque instant la configuration est donc celle indiquée sur la figure 1

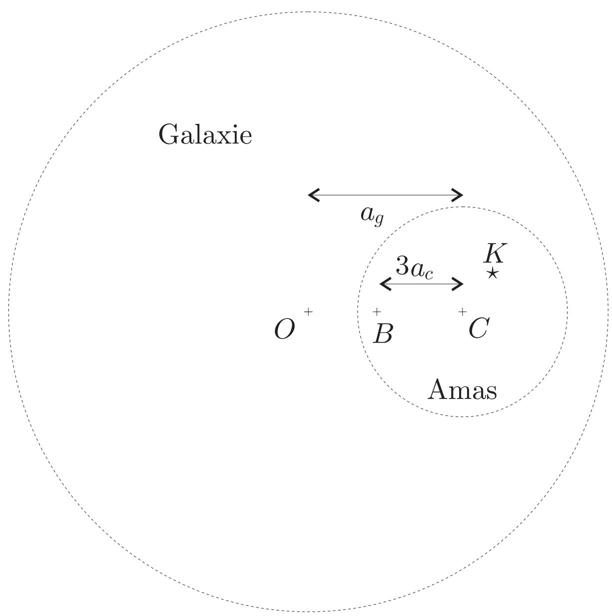

FIGURE 1 – Configuration de l'amas globulaire de centre C et de la galaxie de centre O. Ce schéma n'est pas du tout à l'échelle. Les pointillés indiquent une taille caractéristique car le modèle de Plummer est d'extension infinie.

6– Considérons une étoile test de l'amas, notée $\star$ sur la figure 1, de masse $M_\star$. Donner l'expression des forces $\overrightarrow{F_{g,C}}$ et $\overrightarrow{F_{g,B}}$ exercées par la galaxie sur l'étoile $\star$ lorsque celle-ci se trouve respectivement en C ou en B, ce dernier point étant sur le segment $[OC]$ à une distance $3a_c$ du centre de l'amas. Pourquoi peut-on considérer que la force $\overrightarrow{F_m} = \overrightarrow{F_{g,B}} - \overrightarrow{F_{g,C}}$ est une force de marée ? Pourquoi peut-on considérer que $a_c \ll a_g$? Simplifier sous cette hypothèse l'expression de $\overrightarrow{F_m}$. Quels peuvent être les effets de marée de la galaxie sur l'amas ?

7– La force de cohésion $\overrightarrow{F_{i,K}}$ d'une étoile de l'amas située au point K est simplement la force reçue par cette étoile de la part de toutes les étoiles de l'amas. En considérant toujours que $a_c \ll a_g$, déterminer le rapport

$$\beta = \frac{\left\|\overrightarrow{F_m}\right\|}{\left\|\overrightarrow{F_{i,B}}\right\|}\ .$$

En prenant des valeurs numériques typiques correspondant à une galaxie et un amas globulaire, étudier la résistance d'un amas au harcèlement de la galaxie qui l'abrite.