Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2010

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Un modèle de sphère isotherme en boîte

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

Dans tout ce problème, tous les systèmes considérés possèdent la symétrie sphérique. On notera r la distance radiale, ρ la densité volumique de masse, ψ le potentiel gravitationnel et P la pression.

QUESTION 1

a)Une équation d'état polytropique d'indice 1, est une relation de la forme

$$P\left(r\right)=\lambda\rho\left(r\right)\quad \text{avec } \lambda=\text{ cste}$$

Déterminer la relation différentielle existant à l'équilibre entre $\rho\left(r\right)$ et $\psi\left(r\right)$ pour un tel système.

b)Une sphère isotherme est définie par la relation

$$\rho\left(r\right)=A\ e^{-m\beta\psi(r)}\qquad \text{avec } A\in\mathbb{R}_{+}^{*}$$

Montrer qu'une sphère isotherme vérifie une équation d'état polytropique d'indice 1. On exprimera λ en fonction de β et m.

On souhaite dans ce problème étudier une sphère isotherme de masse totale M et définie dans une boule de rayon R. On modélise la densité de la sphère isotherme par la relation

$$\rho\left(r\right)=\begin{cases}\rho_o & \text{Si } r\leq r_o\\ \rho_o\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 & \text{Si } r_o\leq r\leq R\end{cases}\qquad \text{avec } x=\frac{R}{r_o}\geq 1 \tag{1}$$

On supposera que ce modèle vérifie une équation d'état polytropique d'indice 1.

QUESTION 2

a) Expliquer pourquoi le modèle défini par la relation (1) est une approximation de la sphère isotherme.

b) Montrer que

$$\rho_o=\frac{3M}{4\pi R^3}\frac{x^3}{(3x-2)}$$

$\boxed{\text{QUESTION 3}}$

Sur chacun des intervalles $[0, r_o]$ et $[r_o, R]$ déterminer la masse $\mu(r)$ contenue dans la sphère de rayon r. On exprimera μ uniquement en fonction de M , R, x et r.

$\boxed{\text{QUESTION 4}}$

a) Démontrer que l'énergie potentielle totale contenue dans un système sphérique de rayon R est donnée par la relation

$$W = -4\pi G \int_0^R s \; \rho(s) \;\; \mu(s) \;\; ds$$

b) Calculer l'énergie potentielle totale W_i contenue dans une sphère isotherme contenue dans une boîte de rayon R en utilisant le modèle (1). On mettra le résultat final sous la forme

$$W_i = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\varphi(x)$$

où $\varphi(x)$ est une fonction que l'on déterminera. Commenter la limite de φ lorsque $x \to 1^+$.

$\boxed{\text{QUESTION 5}}$

L'énergie cinétique totale K_i contenue dans une sphère isotherme de masse M, de température $\theta = (k\beta)^{-1}$ constituée de N particules de masse m est donnée par la relation

$$K_i = \frac{3}{2}\frac{N}{\beta} = \frac{3}{2}\frac{M}{m\beta}$$

Pour un système défini sur une boule de rayon R à l'équilibre, le théorème du viriel s'écrit

$$2K + W = 4\pi R^3 P(R) \tag{2}$$

a) Démontrer, ou à défaut commenter, la relation (2).
b) En utilisant la relation (2) dans le cas du modèle (1) de la sphère isotherme dans une boule, démontrer que

$$\tau := \frac{\beta m G M}{R} = \frac{10(x-1)(3x-2)}{x(15x - 14 - 10\ln(x))}$$

$\boxed{\text{QUESTION 6}}$

On note E_i l'énergie mécanique totale contenue dans le modèle (1) de la sphère isotherme de rayon R. Déterminer le paramètre

$$\varepsilon := \frac{E_i R}{GM^2}$$

en fonction de la seule variable x.

$\boxed{\text{QUESTION 7}}$

Pour chaque valeur de $x \in \mathbb{D} =]1, +\infty[$ on considère le point ζ de coordonnées $(\varepsilon(x), \tau(x))$ dans le plan (ε, τ). On peut démontrer que sur $\mathbb{D}$

- la fonction $\dfrac{d\tau}{dx}$ ne s'annule qu'une fois en $x = x_c \approx 3,41$ et qu'elle change de signe en x_c ;
- la fonction $\dfrac{d\varepsilon}{dx}$ est strictement négative.

a) Déterminer les positions limites

$$\zeta_1 = \lim_{x \to 1^+} \zeta \quad \text{et} \quad \zeta_\infty = \lim_{x \to +\infty} \zeta$$

b) Tracer le lieu des points ζ pour $x \in \mathbb{D}$ dans le plan (ε, τ).

QUESTION 8

Le modèle (1) de la sphère isotherme dans une boule permet-il de retrouver les résultats de stabilité que l'on peut obtenir à partir du modèle complet ?