Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2015

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Noether et le vecteur excentricité

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

A - Une constante du mouvement très particulière.

On considère une particule ponctuelle de masse m repérée par un vecteur position $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ et soumise à une force de la forme $\vec{F} = -\operatorname{grad} V(r)$ avec $r = \|\vec{r}\|$.

$\boxed{1}$ Montrer que le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{r}}{dt}$ de la particule est conservé et en déduire que le mouvement est plan.

$\boxed{2}$ Ecrire le lagrangien. En déduire les équations du mouvement de la particule.

$\boxed{3}$ Montrer que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{\vec{r} \wedge \left(\vec{r} \wedge \dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)}{r^\alpha}$$

où l'on déterminera l'entier positif α.

$\boxed{4}$ On introduit l'impulsion de la particule $\vec{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \frac{d\vec{r}}{dt}}$ qui vaut ici $\vec{\pi} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$, montrer que

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\pi} \wedge \vec{L}\right) = mr^2 \frac{dV}{dr}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$\boxed{5}$ On se place dans tout le reste du problème dans le cas du potentiel de Kepler attractif $V(r) = -\dfrac{k}{r}$ avec $k > 0$, montrer que le vecteur $\vec{A} = \vec{\pi} \wedge \vec{L} - km\dfrac{\vec{r}}{r}$ est une intégrale première du mouvement. Calculer $\vec{A} \cdot \vec{L}$, que peut-on en conclure sur le vecteur $\vec{A}$.

Le découvreur de ce vecteur est bien évidement Joseph-Louis Lagrange, mais les auteurs de contributions à son sujet sont Laplace, Lenz, Runge et plus récemment Hermann.

Formulaire pour la partie A

— $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\ \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\ \vec{w}$

— $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\ \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\ \vec{u}$

B - La symétrie de Noether associée.

On considère un corps M de masse m en orbite képleriene dans le champ gravitationnel crée par un corps de masse m_F situé en un point F. On suppose que l'énergie de M est négative, sa trajectoire est donc l'ellipse représentée sur la figure 1.

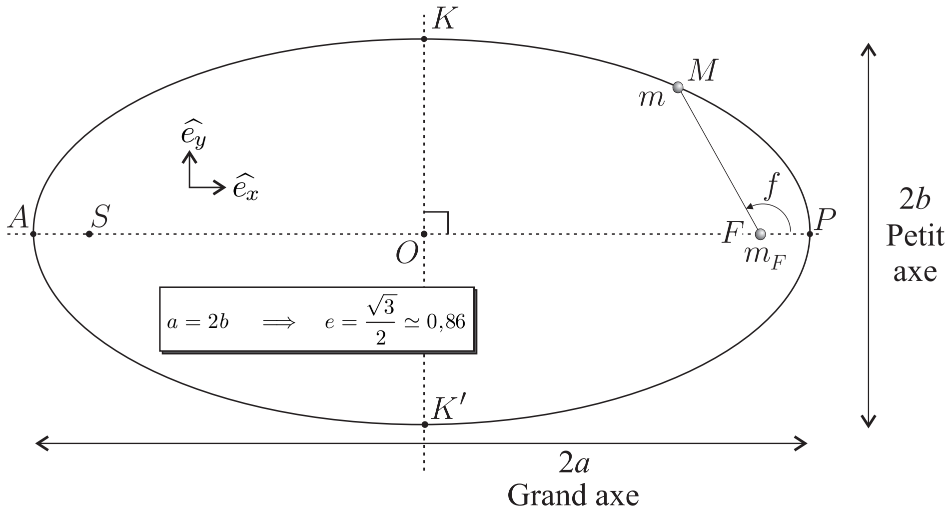

FIGURE 1 – Caractérisation de la trajectoire

$\boxed{6}$ On rappelle qu'une ellipse d'exentricité e et de demi-grand axe a est l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MF}\right\| + \left\|\overrightarrow{MS}\right\| = \Upsilon = \text{cte}$ avec $\left\|\overrightarrow{FS}\right\| = 2ae$. Déterminer la constante Υ en se plaçant en un point particulier de la trajectoire. Montrer que $\left\|\overrightarrow{KF}\right\| = a$. Déterminer, en fonction de l'excentricité e, les expressions de $\cos f$ et $\sin f$ lorsque M est en K. En déduire la valeur de f en ce point pour l'ellipse de la figure 1.

$\boxed{7}$ On rappelle que $\vec{r} = r\,(\cos f\ \widehat{e_x} + \sin f\ \widehat{e_y})$ avec $r = p\,(1 + e\cos f)^{-1}$. Montrer que le vecteur vitesse $\vec{v}\,(M) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{df}{dt}\dfrac{d\vec{r}}{df}$ se met sous la forme

$$\vec{v}\,(M) = \lambda\,(e\ \widehat{e_y} - \sin f\ \widehat{e_x} + \cos f\ \widehat{e_y})$$

où λ est une constante que l'on exprimera en fonction de $L = \|\vec{r} \wedge m\vec{v}\|$, m et p. On pourra exprimer $\dfrac{dr}{df}$ en fonction de e, r, p et $\sin f$. En déduire que le vecteur vitesse parcours un cercle que l'on déterminera. Ce cercle est appelé cercle des vitesses ou hodographe de cette orbite.

$\boxed{8}$ En écrivant l'expression de l'énergie $E = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} - \frac{m\mu}{r}$ au périgée et à l'apogée, déduire l'expression de la constante $\mu = GM_F$ en fonction de L, m et p. En déduire une expression de L en fonction de m, p, E et e.

$\boxed{9}$ En utilisant les résultats des questions précédentes montrer que la vitesse en K et en K' n'est portée que par le vecteur $\widehat{e_x}$ et que son module ne dépend que de E et m.

Lorsqu'il est en K et en conservant son vecteur vitesse, on transfère instantanément le point M en un point K_φ obtenu en lui appliquant une rotation d'angle φ autour du point F dans le plan orbital (voir figure 2).

$\boxed{10}$ Montrer que la nouvelle trajectoire est toujours une ellipse.

$\boxed{11}$ Déterminer le petit axe, le grand axe et l'excentricité de cette nouvelle ellipse. Calculer leurs nouvelles valeurs sur l'exemple de la figure 2 et tracer cette nouvelle orbite.

On considère la famille $\mathcal{F}_E$ des cercles des vitesses que l'on obtient en faisant varier l'angle φ. On démontre que $\mathcal{F}_E$ correspond à toutes les orbites possédant l'énergie E, cette famille est appelée l'hodographe des orbites d'énergie E.

$\boxed{12}$ Déterminer les caractéristiques du cercle des vitesses de la nouvelle orbite. En généralisant, tracer $\mathcal{F}_E$.

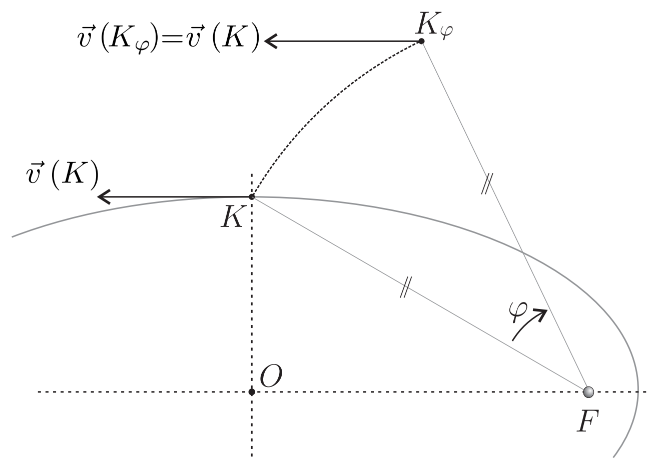

Figure 2 – Transport du point en conservant sa vitesse, sur la figure $\varphi = \pi/6$ dans le sens horaire.

On appelle projection stéréographique d'une sphère (dans $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{S}_2$) sur un plan, l'application illustrée sur la figure 3 telle que, par exemple, l'image de z_1 est z_1'. Il s'agit d'une transformation conforme, l'image d'un cercle est donc un cercle.

$\boxed{13}$ De quels cercles sur la sphère $\mathcal{S}_2$, la famille $\mathcal{F}_E$ est-elle l'image dans le plan par projection stéréographique. Quelle transformation de la sphère laisse globalement invariante $\mathcal{F}_E$?

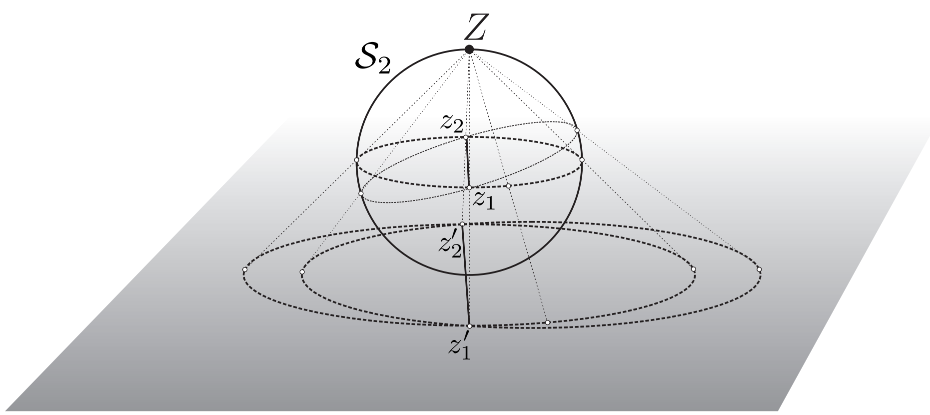

Figure 3 – Projection stéréographique.

En généralisant à toutes les valeurs possibles de l'énergie et en prenant en compte tous les plans orbitaux possibles associés aux différentes valeurs possibles du moment cinétique, l'hodographe devient une collection de sphères.

$\boxed{14}$ De quelle projection stéréographique généralisant celle de la question précédente, cet hodographe est-il l'image. Quelle est la symétrie correspondante ?

On montre que cette symétrie est la symétrie de Noether associée à la conservation du vecteur de Lagrange-Lenz-Runge-Laplace-Hermann !