

Effet de la mise en forme sur les vibrations d'une coque mince : application au steelpan.

Mélodie MONTEIL ¹, Olivier THOMAS ², Joël FRELAT ³, Cyril TOUZÉ ⁴

¹ IJLRDA-UMPC PARIS 6 / UME- ENSTA-ParisTech, melodie.monteil@ensta-paristech.fr

² ENSAM-LILLE, olivier.thomas@ensam.eu

³ IJLRDA-UMPC PARIS 6 / CNRS, joel.frelat@lmm.jussieu.fr

⁴ Unité de Mécanique (UME), ENSTA-ParisTech, cyril.touze@ensta-paristech.fr

1 Introduction

1.1 Description des steelpans et de leur fabrication

Les steelpans sont des instruments de percussion nés au début du XXème siècle sur l'île de Trinidad et Tobago dans les Antilles. Ils sont fabriqués à partir de fûts métalliques (type bidons de pétrole, voir Fig. 1(a)). Au cours de leur fabrication, ces fûts subissent une succession de transformations : martelage, poinçonnage et chauffage [1]. Comme montré sur la figure 1(b), une fois le processus terminé, les steelpans présentent différents dômes, issus de la même pièce de métal. Chaque dôme est associé à une note de l'instrument. Lors de l'accordage, les fréquences des modes propres sont finement ajustées par martelage de sorte à présenter des relations harmoniques (f , $2f$, 3 (ou 4) f , ...). Le mode de jeu des steelpans consiste à frapper chacun des dômes à l'aide de maillets en bois (*les sticks*) recouverts d'un morceau de caoutchouc en leur extrémités (voir figure 1(b)).

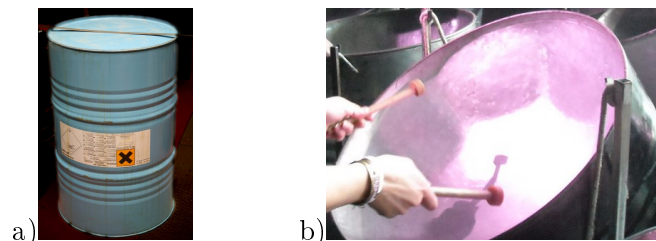


Fig. 1 – (a) Bidon de pétrole servant à la fabrication des steelpans. (b) Steelpan à l'issue de la fabrication en condition de jeu.

De nombreuses études, réalisées principalement par Achong [1, 2], Rossing [7, 8] et Copeland [5], s'intéressent aux vibrations de l'instrument terminé, d'une part en proposant des modèles non linéaires des interactions possibles entre les modes de vibrations, d'autre part en réalisant une campagne d'analyses modales par holographie. L'aspect métallurgique des changements dus à la transformation, durant le processus de fabrication, a aussi été considéré [6].

Ici, nous nous intéressons plus particulièrement à la première étape de fabrication. Le facteur (*tuner*) emboutit le bidon à l'aide d'un marteau pneumatique, en cherchant à déformer progressivement la surface, initialement plane et de fine épaisseur, en une cuve sphérique régulière comme le montre la figure 2. L'objectif de cette étude est de modéliser ce procédé expérimental de plastification, afin d'obtenir à la fois la nouvelle géométrie et l'état de contraintes résiduelles, dans le but d'observer leurs influences sur la valeur des fréquences propres de la structure dans

sa configuration finale.

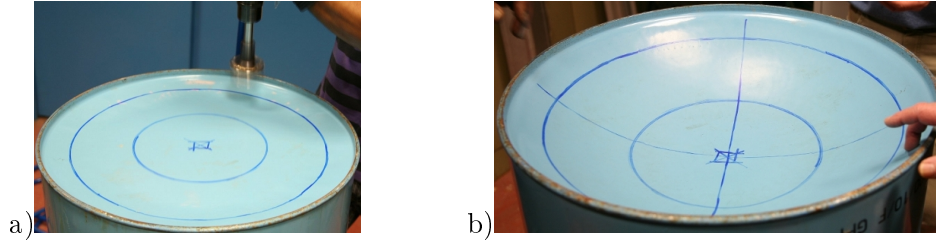


Fig. 2 – Première étape du procédé de fabrication des steelpans : embouti au marteau pneumatique. (a) État initial : disque plan. (b) État final : calotte sphérique concave (géométrie axisymétrique).

1.2 Mesures de contraintes résiduelles

La première étape de fabrication des figures 2(a) et 2(b) a été réalisée au laboratoire. Dans un premier temps, le profil de déformation obtenu a été mesuré le long d'un diamètre, à la fin de la transformation. On verra (notamment sur les figures 5(d) et 6(d)) que l'allure de ce profil nous permettra d'ajuster le modèle proposé par la suite. La surface du bidon, initialement plane et circulaire, est déformée plastiquement par martelage jusqu'à l'obtention d'une géométrie courbe de type calotte sphérique, dont la flèche maximale est de l'ordre de 100 fois l'épaisseur ($w_{max} = 12$ centimètres pour $h = 1,3$ millimètres). On remarque alors sur la figure 2(b) que la géométrie est axisymétrique .

D'autre part, l'état de contraintes résiduelles a aussi été mesuré. Cela a été réalisé par diffractométrie au rayons X (voir figure 3). Les contraintes résiduelles radiales et circonférentielles (respectivement σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$) ont été mesurées en 6 points selon un rayon de la surface concave, 2 points sur un autre rayon (à 90 degrés du premier) et en un seul point (au centre) à l'intérieur du bidon, soit sur l'extrado de la courbure. On peut noter que les valeurs sont de signes opposés selon si l'on se trouve à l'intrado (contrainte positive) ou à l'extrado (contrainte négative) et qu'en valeur absolue, les valeurs des contraintes sont sensiblement les mêmes. Aussi si l'on intéresse uniquement aux valeurs mesurées le long du rayon, on peut, en première approximation, considérer que cette contrainte est constante, à la fois selon r et selon θ . L'état de contrainte est localement isotrope dans le plan (les contraintes résiduelles radiales et orthoradiales sont égales : $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta}$).

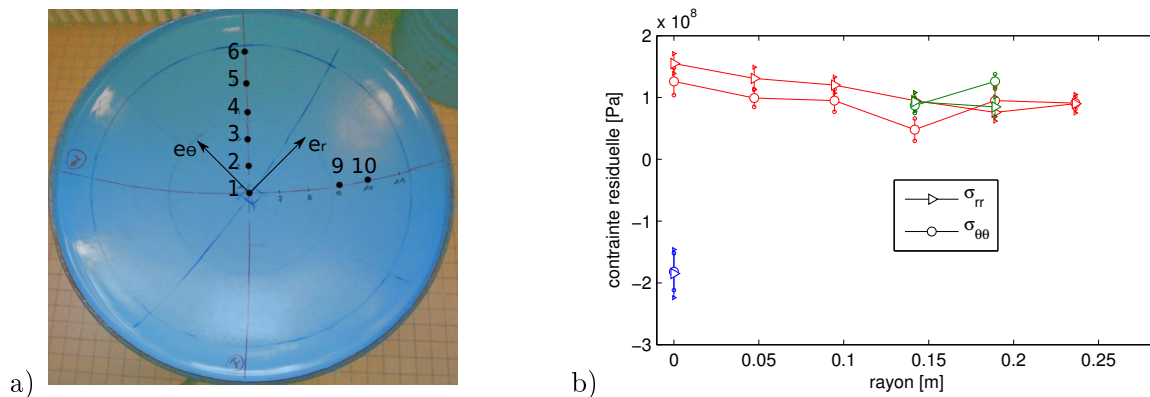


Fig. 3 – Mesures de l'état de contraintes résiduelles, radiales et circonférentielles, par diffractométrie au rayon X, à l'issue de l'étape de fabrication. (a) Position des points de mesure. (b) Tracé des contraintes mesurées. Intrado : points de 1 à 6 sur un rayon (rouge) et points 9 et 10 sur un autre rayon (vert). Extrado (bleu) point 1. Barres d'erreurs à ± 20 MPa.

1.3 Objectif de l'étude

Le principal problème est de caractériser l'état de la structure après sa mise en forme. Un calcul élastoplastique complet prenant en compte de manière fine le procédé de mise en forme est complexe à mettre en place. En revanche, il est possible de contourner cette difficulté en ne considérant que l'état du système après mise en forme est en équilibre statique, avec un état contrainte/déformation qui vérifie :

$$\boldsymbol{\sigma}_R = \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^P) = \mathbf{L}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0). \quad (1)$$

où \mathbf{L} est l'opérateur d'élasticité, $\boldsymbol{\sigma}_R$ est la contrainte résiduelle et $\boldsymbol{\varepsilon}$ correspond à l'état déformé de la structure. Le champ de déformation plastique ($\boldsymbol{\varepsilon}^P$), issu du procédé de fabrication, peut être vu de manière équivalente, comme un champ de déformation initiale ($\boldsymbol{\varepsilon}^0$), qu'il s'agit d'imposer à la structure élastique. En calculant l'équilibre de la structure sous l'action de $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{L}\boldsymbol{\varepsilon}^0$, on obtient l'état de la structure après mise en forme. Toute la question est donc de choisir la bonne forme du champ de contraintes initiales pour obtenir une déformée réaliste, qui correspond au profil géométrique de la coque, pour ensuite en déduire l'état de contrainte résiduel. C'est ensuite autour de cette configuration que l'on calcule les vibrations de la structure.

2 Modèle analytique d'une plaque circulaire précontrainte

On considère une plaque circulaire mince de rayon a , d'épaisseur h , constituée d'un matériau homogène et isotrope de module d'Young E et de coefficient de poisson ν . On utilise une cinématique de Kirchhoff-Love et les non-linéarités géométriques prises en compte à partir d'un modèle de von Kármán. La plaque circulaire est encastrée sur toute sa périphérie, pour modéliser sa fixation sur les côtés du fût métallique.

2.1 Modèle non linéaire de plaque avec contraintes initiales

Le champ de déplacement de la plaque s'écrit :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, z) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - z\nabla w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x})\mathbf{e}_z, \quad (2)$$

où \mathbf{x} est la position dans le plan de la plaque, z est la coordonnée suivant l'épaisseur de la plaque, \mathbf{u} est le déplacement dans le plan de la plaque, w est le déplacement transverse, et ∇ le gradient. Le champ de déformation dans le plan moyen de la plaque s'écrit alors [9] :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u} + \nabla w \otimes \nabla w), \quad (3)$$

où la partie quadratique provient des hypothèses de von Kármán.

En utilisant la loi de comportement élastique linéaire de l'équation (1), l'effort normal et le moment fléchissant s'écrivent :

$$\mathbf{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz = A[(1 - \nu)\boldsymbol{\varepsilon} + \nu\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{1}] - \mathbf{N}_0, \quad (4a)$$

$$\mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} z\boldsymbol{\sigma} dz = -D[(1 - \nu)\nabla\nabla w + \nu\Delta w\mathbf{1}] - \mathbf{M}_0, \quad (4b)$$

où \mathbf{N}_0 et \mathbf{M}_0 sont les efforts généralisés initiaux, qui s'écrivent $\mathbf{N}_0 = \iint_S \boldsymbol{\sigma}_0 dS$ et $\mathbf{M}_0 = \iint_S z\boldsymbol{\sigma}_0 dS$, en fonction de la contrainte initiale $\boldsymbol{\sigma}_0$. $A = Eh/(1 - \nu^2)$ et $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ sont respectivement la raideur de membrane et la raideur en flexion de la plaque.

Les équations d'équilibre de la plaque montrent que lorsque l'inertie de membrane est négligée, $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{N}} - \mathbf{N}_0$ doit être à divergence nulle, ce qui permet d'introduire une fonction d'Airy $F =$

$\hat{F} - F_0$ (on impose alors à $\hat{\mathbf{N}}$ et \mathbf{N}_0 d'être séparément à divergence nulle). Dans ce cas, les équations du mouvement s'écrivent [9] :

$$D\Delta\Delta w + \rho h \ddot{w} = L(w, F) + L(w, F_0) + \text{div div} \mathbf{M}_0, \quad (5a)$$

$$\Delta\Delta \hat{F} = -\frac{Eh}{2}L(w, w) - \Delta\Delta F_0, \quad (5b)$$

où $L(w, F)$ est l'opérateur bilinéaire classique des équations de von Kármán [9].

2.2 Vibrations autour d'un état résiduel statique

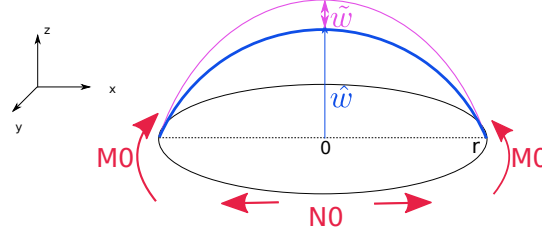


Fig. 4 – Plaque soumise aux contraintes initiales, vibrations autour de l'état d'équilibre déformé.

On commence par adimensionner l'équation (5) avec les variables suivantes :

$$r = a\bar{r}, \quad t = a^2\sqrt{\frac{\rho h}{D}}\bar{t}, \quad w = w_0\bar{w}, \quad F = Eh w_0^2 \bar{F}, \quad \varepsilon = 12(1 - \nu^2)\frac{w_0^2}{h^2},$$

$$\mathbf{N}_0 = N_a \bar{\mathbf{N}}_0, \quad \mathbf{M}_0 = M_a \bar{\mathbf{M}}_0, \quad F_0 = F_a \bar{F}_0,$$

$$\text{où } N_a = \frac{Eh w_0^2}{a^2}, \quad M_a = \frac{D w_0}{a^2} \quad \text{et} \quad F_a = Eh w_0^2.$$

Ensuite, les variables sont décomposées en une partie statique ($\hat{\cdot}$) et une partie dynamique ($\tilde{\cdot}$), qui représentent respectivement l'état de repos de la plaque et les vibrations autour de cet état de repos (comme montré sur la figure 4). On écrit alors $w = \hat{w} + \tilde{w}$ et $F = \hat{F} + \tilde{F}$, et on obtient le problème statique :

$$\Delta\Delta \hat{w} = \varepsilon L(\hat{w}, \hat{F}) - \varepsilon L(\hat{w}, F_0) - \text{div div} \mathbf{M}_0, \quad (6a)$$

$$\Delta\Delta \hat{F} = -\frac{1}{2}L(\hat{w}, \hat{w}) + \Delta\Delta F_0, \quad (6b)$$

et le problème dynamique :

$$\Delta\Delta \tilde{w} + \ddot{\tilde{w}} = \varepsilon L(\hat{w}, \tilde{F}) + \varepsilon L(\tilde{w}, \hat{F}) + \varepsilon L(\tilde{w}, \tilde{F}) - \varepsilon L(\tilde{w}, F_0), \quad (7a)$$

$$\Delta\Delta \tilde{F} = -\frac{1}{2}[2L(\hat{w}, \tilde{w}) + L(\tilde{w}, \tilde{w})]. \quad (7b)$$

NB : Dans un souci de clarté de lecture des équations, les barres au-dessus des variables adimensionnées ne sont pas précisées (Eqs. 6 et 7 et dans la suite du document).

2.3 Discrétisation par projection modale

Les inconnues du problème sont développées sur les bases des modes propres linéaires associées à chacune des variables (w et F), de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{w}(r, \theta) = \sum_{i=1}^{N_w} \Phi_i(r, \theta) \hat{q}_i, \\ \hat{F}(r, \theta) = \sum_{i=1}^{N_F} \Psi_i(r, \theta) \hat{\eta}_i, \end{array} \right. \quad (8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^{N_w} \Phi_i(r, \theta) \tilde{q}_i(t), \\ \tilde{F}(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^{N_F} \Psi_i(r, \theta) \tilde{\eta}_i(t), \end{array} \right. \quad (9)$$

où les déformées modales Φ_i et Ψ_i et les coordonnées modales q_i et η_i sont respectivement associées aux N_w modes transverses et N_F modes de membrane retenus dans la projection. Les Φ_i et Ψ_i vérifient les problèmes aux valeurs propres associés aux parties linéaires des équations (5) adimensionnées, qui s'écrivent :

$$\Delta\Delta\Phi_i - \omega_i^2\Phi_i = 0, \quad \Delta\Delta\Psi_i - \zeta_i^4\Psi_i = 0, \quad (10)$$

associés aux conditions aux limites vérifiées par w et F . Les ω_i sont les pulsations propres de la plaque et les ζ_i sont les valeurs propres du problème de membrane.

En tenant compte de la propriété d'orthogonalité des modes propres, la projection du problème statique Eq. (6) donne la forme suivante :

$$\omega_\alpha^2 \hat{q}_\alpha - \varepsilon \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} H_{p\alpha}^j \hat{q}_p \hat{\eta}_j + \varepsilon \sum_{p=1}^{N_w} G_p^\alpha \hat{q}_p + K_\alpha = 0, \quad (11a)$$

$$\zeta_j^4 \hat{\eta}_j + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} H_{pq}^j \hat{q}_p \hat{q}_q - f_j = 0, \quad (11b)$$

et la projection du problème dynamique Eq. (7) linéarisé entraîne :

$$\ddot{\tilde{q}}_\alpha + \omega_\alpha^2 \tilde{q}_\alpha - \varepsilon \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} H_{i\alpha}^j \hat{q}_i \hat{\eta}_j - \varepsilon \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} H_{i\alpha}^j \hat{\eta}_j \tilde{q}_i + \varepsilon \sum_{i=1}^{N_w} G_i^\alpha \tilde{q}_i = 0, \quad (12a)$$

$$\tilde{\eta}_j = -\frac{1}{2\zeta_j^4} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} H_{pq}^j \hat{q}_p \tilde{q}_q, \quad (12b)$$

où ω_α et ζ_j sont définis dans Eq. (10), et où les coefficients de couplage sont :

$$H_{pq}^j = \iint_S \Psi_j L(\Phi_p, \Phi_q) dS, \quad G_p^\alpha = \iint_S \Phi_\alpha L(\Phi_p, F_0) dS, \quad K_\alpha = \iint_S \Phi_\alpha \operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{M}_0 dS, \quad f_j = \iint_S \Psi_j \Delta \Delta F_0 dS. \quad (13) \quad (14) \quad (15) \quad (16)$$

On note que les modes sont normalisés de sorte que $\iint_S \Phi_\alpha^2(x) dS = 1$ et $\iint_S \Psi_j^2(x) dS = 1$.

Le problème dynamique des Eq. (12a) et (12b) peut être réécrit en condensant les inconnues de membrane η_j dans le problème de flexion, soit Eq. (12b) dans Eq. (12a), pour obtenir :

$$\ddot{\tilde{q}}_\alpha + \omega_\alpha^2 \tilde{q}_\alpha + \underbrace{\varepsilon \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} \sum_{i=1}^{N_w} \Gamma_{pqi}^\alpha \hat{q}_p \hat{q}_q \tilde{q}_i}_{\text{géométrie}} - \underbrace{\varepsilon \sum_{i=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_F} H_{i\alpha}^j \hat{\eta}_j \tilde{q}_i - \varepsilon \sum_{i=1}^{N_w} G_i^\alpha \tilde{q}_i}_{\text{contrainte résiduelle}} = 0, \quad (17)$$

où

$$\Gamma_{pqi}^\alpha = \sum_{j=1}^{N_F} \frac{H_{q\alpha}^j H_{pi}^j}{2\zeta_j^4}. \quad (18)$$

Il s'agit du classique coefficient des termes non linéaires cubiques qui apparaît dans les modèles non linéaires de plaques et coques [10]. L'équation (17) permet de comprendre comment les fréquences propres de la plaque sont affectées par le chargement. Cette équation est linéaire en fonction de \tilde{q}_α et peut être écrite sous la forme matricielle $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ avec $\tilde{\mathbf{q}} = \{\tilde{q}_1 \dots \tilde{q}_{N_w}\}^T$, avec la matrice carrée \mathbf{A} qui dépend d'une part du changement géométrique (via les \hat{q}_i) et d'autre part des contraintes résiduelles, via les $\hat{\eta}_j$ et les G_p^α . Le calcul des fréquences propres et des déformées modales associées se fait par diagonalisation de la matrice \mathbf{A} . La suite de l'étude s'attache à quantifier l'influence sur les fréquences propres de ces deux effets : le changement de géométrie de la structure et les contraintes résiduelles.

3 Résultats numériques

Le problème statique Eq. (11) est un problème algébrique dont les inconnues sont les coordonnées modales des modes transverses q_α et celles des modes de membrane η_j qui dépendent de deux paramètres \mathbf{N}_0 et \mathbf{M}_0 . Ce problème est résolu par une méthode de continuation, la méthode asymptotique numérique, implémentée dans le code MANLAB [3]. On choisit les contraintes initiales sous la forme $\mathbf{N}_0 = n_0 \mathbf{1}$ et $\mathbf{M}_0 = m_0 r^2 \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est l'opérateur identité. Ainsi les deux paramètres de chargement deviennent de simples coefficients constants n_0 et m_0 . La méthode de continuation consiste à faire varier proportionnellement n_0 et m_0 à travers un paramètre de continuation λ , tel que n_0 et m_0 sont remplacés par λn_0 et λm_0 dans le calcul.

3.1 Cas d'un flambage "pur"

Pour à la fois vérifier les calculs et observer le comportement de la plaque sous différents chargements initiaux, on commence par réaliser un calcul de flambage, avec $m_0 = 0$ et $n_0 \neq 0$ qui est le seul paramètre de chargement. On obtient les résultats de la figure 5.

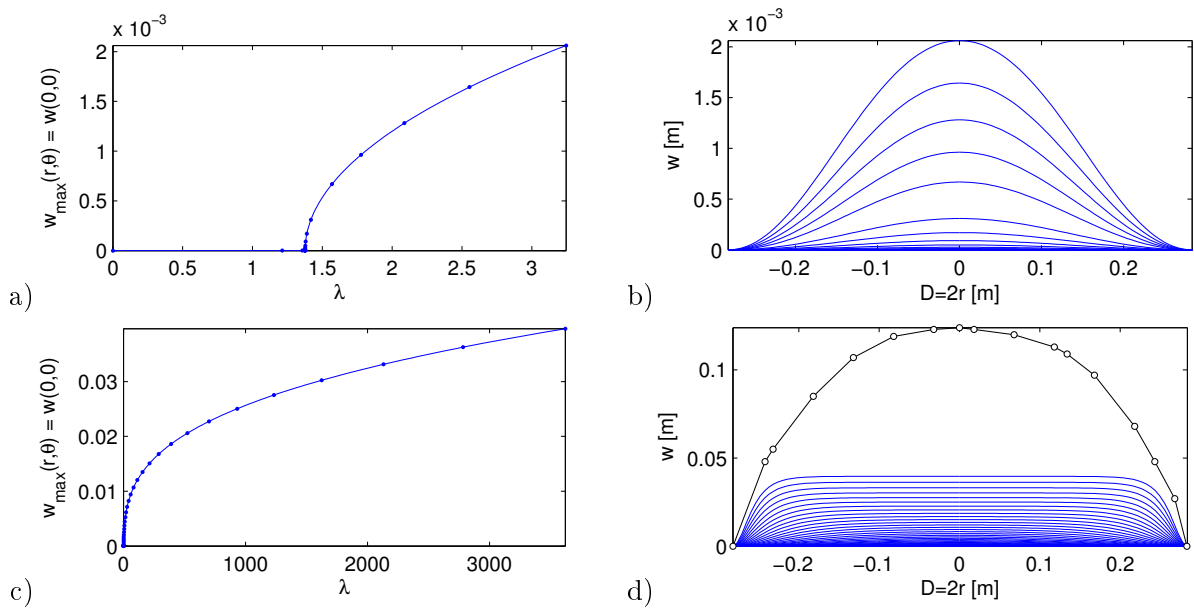


Fig. 5 – Résolution statique : $n_0 = 1$, $m_0 = 0$. (a) et (c) Diagrammes de bifurcation. (b) et (d) Évolution du profil géométrique. (a) et (b) pour un faible chargement (faible valeur de λ). (c) et (d) Chargement plus important (grande valeur de λ). (d) Comparaison au profil expérimental (noir).

La charge critique de flambage (obtenue pour une valeur dimensionnée de $N_0 = 14.68D/a^2$, soit ici pour $n_0 = 1$ et $\lambda = 14.68/12/(1 - \nu^2) \simeq 1.34$) d'une plaque circulaire encastree sous chargement uniforme de membrane est retrouvée [4]. On observe de plus que pour des grandes valeurs de λ , le profil de la plaque tend à devenir de plus en plus plat.

3.2 Correspondance avec le profil expérimental

On utilise les paramètres suivants : une plaque circulaire de diamètre $D = 0,567$ m et d'épaisseur $h = 0,0013$ m. Cette plaque est en acier, alors $E = 210e^9$ Pa, $\nu = 1/3$ et $\rho = 7800$ Kg/m³. La figure 6 montre qu'il faut imposer un chargement initial à la fois en moment et en efforts de membrane pour retrouver un profil proche de celui mesuré expérimentalement (valeurs adimensionnées : $m_0 = -150n_0$).

Les figures 7(a) et (c) montrent l'évolution des cinq premières fréquences propres en fonction du chargement initial. La présente formulation permet de dissocier l'effet de la géométrie de celui

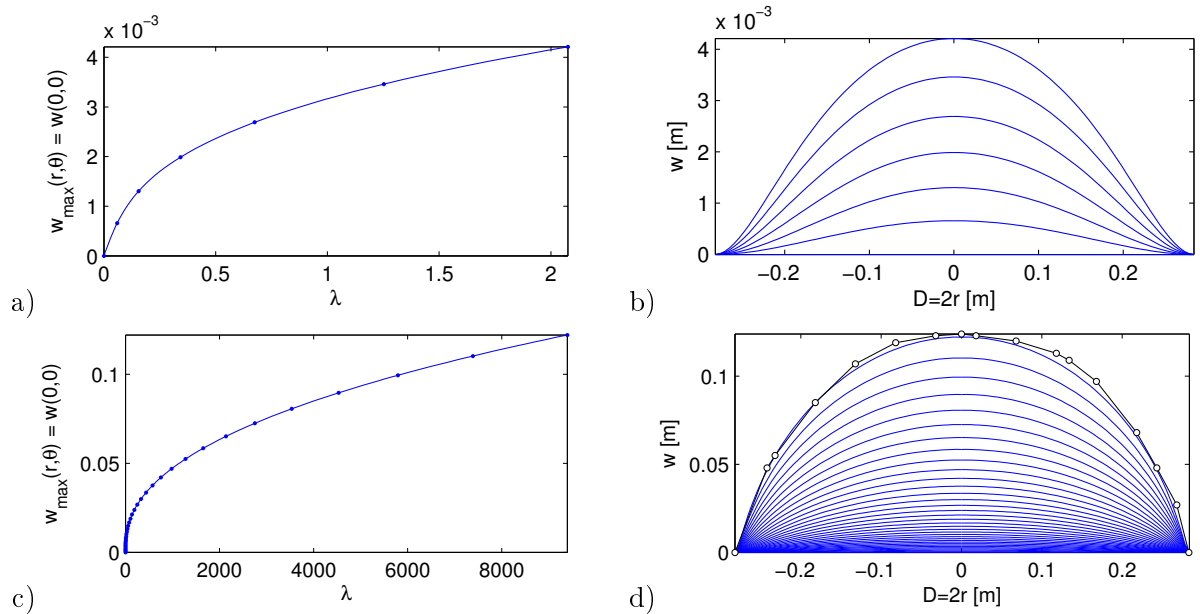


Fig. 6 – Résolution statique correspondant aux données expérimentales. : $n_0, m_0 = -150$. (a) et (c) Diagrammes de bifurcation. (b) et (d) Évolution du profil géométrique. (a) et (b) pour un faible chargement (faible valeur de λ). (c) et (d) Chargement plus important (grande valeur de λ). (d) Comparaison au profil expérimental (noir).

des contraintes résiduelles (via les deux termes de la matrice \mathbf{A}). Les figures 7(a) et (c) montrent aussi que la principale cause de variation des fréquences propres est le changement de géométrie, l'influence des contraintes résiduelles étant assez faible en comparaison.

4 Conclusion

Cet article a montré les premiers résultats d'une étude sur la prise en compte des procédés de fabrication d'un steelpan sur ses vibrations. Moyennant des répartitions de contraintes initiales simples, on a retrouvé une géométrie finale très proche de celle mesurée sur un steelpan. Par la suite, le même travail sera effectué sur les modes asymétriques et le calcul des contraintes résiduelles sera effectué en post-traitement, pour le valider avec les résultats expérimentaux. D'autres répartitions de contraintes initiales seront aussi testées.

Références

- [1] A. Achong. *The steelpan as a system of non-linear mode-localized oscillators, I : Theory, simulations, experiments and bifurcations*, Journal of Sound and Vibration, 197(4) :471–487, 1996.
- [2] A. Achong. *Mode locking on the non-linear notes of the steelpan*, Journal of Sound and Vibration, 266 :193–197, 2003.
- [3] R. Arquier, S. Karkar, A. Lazarus, O. Thomas, C. Vergez, B. Cochelin. *Manlab 2.0 : an interactive path-following and bifurcation analysis software*, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS, 2005-2011. <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>
- [4] F. Bloom, D. Coffin. *Handbook of thin plate buckling and postbuckling*, Chapman & Hall / CRC, 2001.
- [5] F. Muddeen and B. Copeland. *Sound radiation from Caribbean steelpans using nearfield acoustical holography*, Journal of the Acoustical Society of America, 131(2) :1558–1565, 2012.
- [6] L. E. Murr, E.V. Esquivel, Lawrie S.C., Lopez M.I., Lair S.L., K.F. Soto, S.M. Gaytan, D. Bujanda, R.G. Kerns, P.A. Guerrero, and J.A. Flores. *Fabrication of aluminum, Caribbean-style, musical pan : Metallurgical and acoustical characterization*, Material Characterization, 57 :232–243, 2006.
- [7] T. D. Rossing, Uwe J. Hansen, and D. S. Hampton. *Vibrational mode shapes in Caribbean steelpans. I. Tenor and double second*, Journal of the acoustical society of america, 108(2) :803–812, 2000.

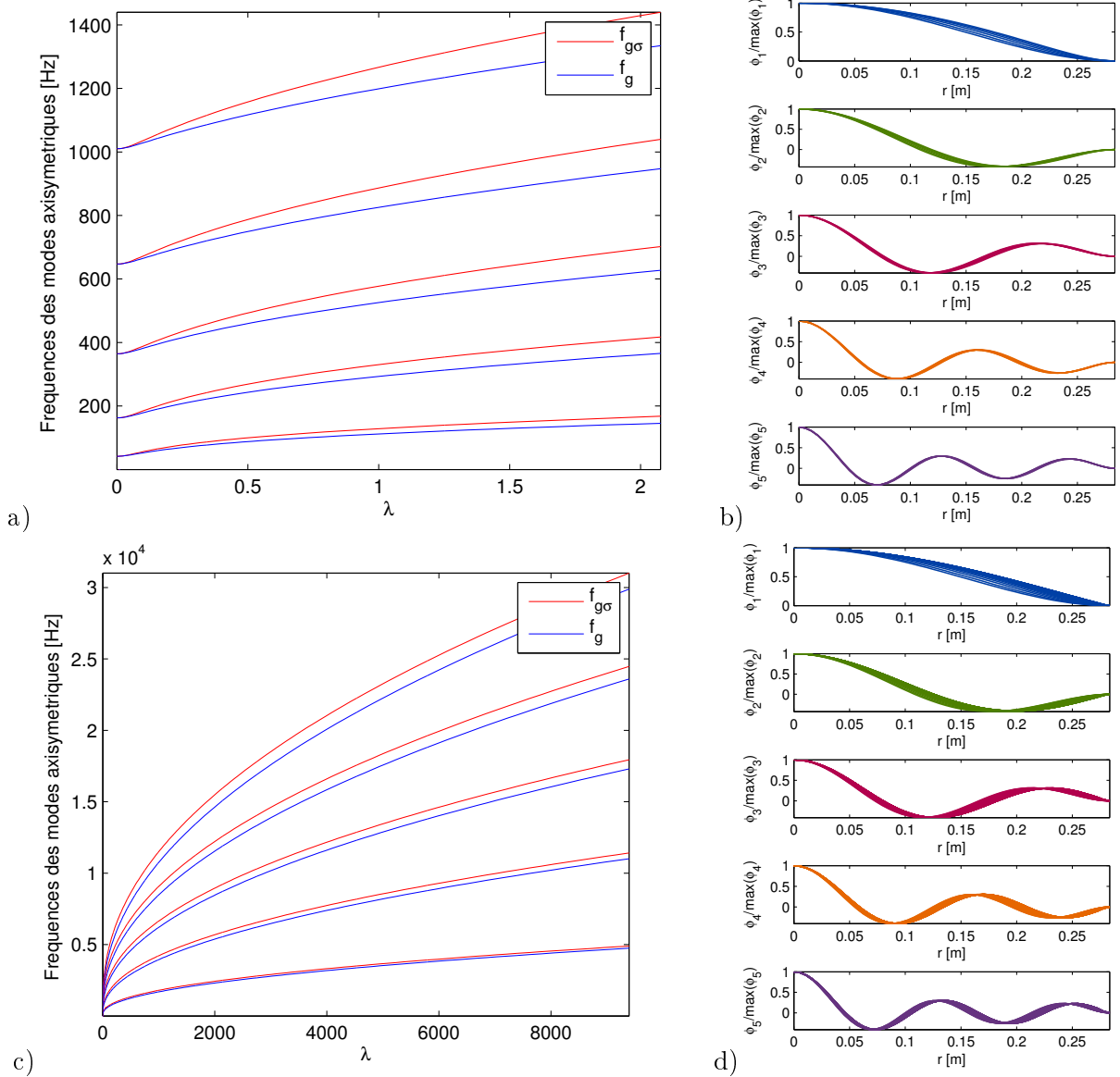


Fig. 7 – Résolution statique correspondant aux données expérimentales. : $n_0, m_0 = -150$. (a) et (b) Faible chargement. (c) et (d) Chargement important allant jusqu'au fit du profil géométrique (cf Fig. 6). (a) et (c) Évolution des cinq premières fréquences propres axisymétriques avec (rouge) et sans (bleu) tenir compte du terme de contrainte dans la matrice des fréquences propres. (b) et (d) Cinq premières déformées modales axisymétriques normalisées correspondantes.

- [8] T. D. Rossing and Uwe J. Hansen. *Vibrational mode shapes in Caribbean steel pans. II. cello and bass*, Applied acoustics, 65 :1233–1247, 2004.
- [9] O. Thomas, S. Bilbao. *Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates : In-plane boundary conditions and some symmetry properties*, Journal of Sound and Vibration, 2008.
- [10] O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne. *Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance*, Internal Journal of Solids and Structures, 42 :3339–3373, 2005.