

Prédiction de la dynamique chaotique d'un absorbeur passif non linéaire bistable sous forçage quasi-périodique.

P.-O. Mattei, V. Iurasov, M. Pachebat

Journée GdR Dynolin
11 octobre 2016

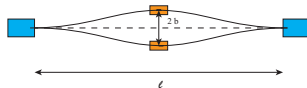
Comment extraire *efficacement* l'énergie d'une structure vibrante ou d'un champ sonore ?

- ▶ **Niveaux vibratoires très faibles** \Rightarrow abaisser le seuil.
- ▶ NES à raideur variable : mollissante basse amplitude, raidissante forte amplitude
- ▶ **NES flambé !**

Comment extraire *efficacement* l'énergie d'une structure vibrante ou d'un champ sonore ?

- ▶ **Niveaux vibratoires très faibles** \Rightarrow abaisser le seuil.
- ▶ NES à raideur variable : mollissante basse amplitude, raidissante forte amplitude
- ▶ **NES flambé !**
- ▶ Abaisse (considérablement) le seuil de pompage
- ▶ Mouvement chaotique possible

Modèle à 1 ddl pour 1 NES flambé



Géométrie du NES.

On écrit (**forte hypothèse**) le déplacement de la poutre bi-encastée flambée (non-linéaire) comme :

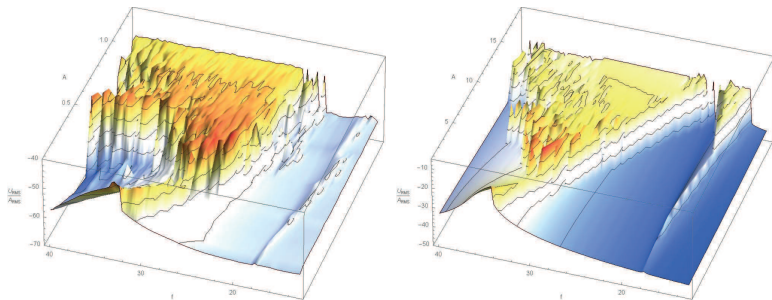
$$w(x,t) = w_0(x) (1 + q(t)), \text{ avec } w_0(x) = \frac{1}{2}b(1 - \cos 2\pi \frac{x}{\ell}).$$

Après réduction de Ritz, on obtient une éq diff NL de type Helmholtz-Duffing pour le NES :

$$m_N \ddot{q}(t) + \mu_N \dot{q}(t) + k_N \mathcal{F}(q(t)) = A_{ex} \cos(2\pi f_{ex} t)$$

- ▶ $\mathcal{F}(q(t)) = (q(t) - b) + \frac{3}{2b}(q(t) - b)^2 + \frac{1}{2b^2}(q(t) - b)^3$: non linéarité
- ▶ $m_N = (\frac{3}{8}\rho A \ell + m_0)$: masse dynamique
- ▶ $\mu_N = 4\pi m_N \hat{f}_N$: amortissement dynamique (**paramètre identifié**)
- ▶ $k_N = (2\pi \check{f}_N)^2 m_N$: raideur équivalente dynamique (**paramètre identifié**)

Surfaces de réponse amplitude-fréquence pour le NES seul

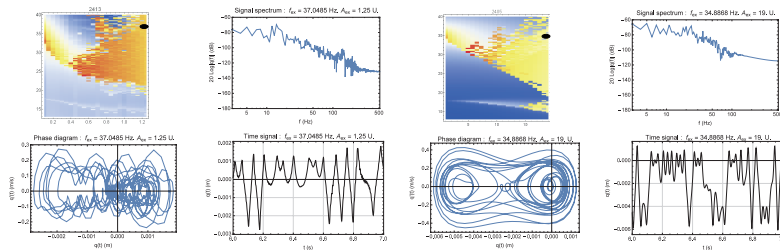


FRF du NES. Mesure (gauche) et calcul (droite).

q_{RMS}/A_{ex} vs f_{ex} & A_{ex} .

- ▶ harmonique 1/2 à faible amplitude
- ▶ envahissement du plan $A_{ex} - f_{ex}$: mouvement chaotique du NES à forte amplitude
- ▶ comportement amollissant à faible amplitude

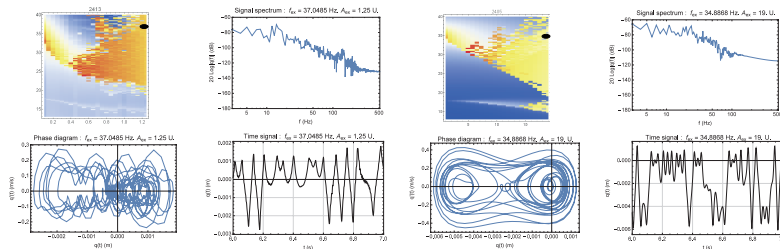
Exemples de réponses mesurées et calculées



Fort niveau d'excitation ($\lambda_1 > 0$).

Efficacité maximale lors du mouvement chaotique...

Exemples de réponses mesurées et calculées



Fort niveau d'excitation ($\lambda_1 > 0$).

Efficacité maximale lors du mouvement chaotique...

Peut-on prédire le déclenchement de cette dynamique chaotique sous forçage périodique et pseudo-périodique ?

Dynamique chaotique du NES : méthode de Melnikov

Prédiction de la dynamique chaotique par analyse des orbites homocliniques...

Dynamique chaotique du NES : méthode de Melnikov

Prédiction de la dynamique chaotique par analyse des orbites homocliniques...
On part de l'équation du NES adimensionnée :

$$\ddot{x}(t) + \varepsilon \delta \dot{x}(t) + \left(x(t) + \frac{3}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}x(t)^3 \right) = \varepsilon \gamma \cos \Omega t, \varepsilon \ll 1$$

Dans l'espace des phases :

$$y(t) = \dot{x}(t)$$

$$\dot{y}(t) = -f(x(t)) - \varepsilon (\delta \dot{x}(t) - \gamma \cos \Omega t)$$

Dynamique chaotique du NES : méthode de Melnikov

Prédiction de la dynamique chaotique par analyse des orbites homocliniques...
On part de l'équation du NES adimensionnalisée :

$$\ddot{x}(t) + \varepsilon \delta \dot{x}(t) + \left(x(t) + \frac{3}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}x(t)^3 \right) = \varepsilon \gamma \cos \Omega t, \varepsilon \ll 1$$

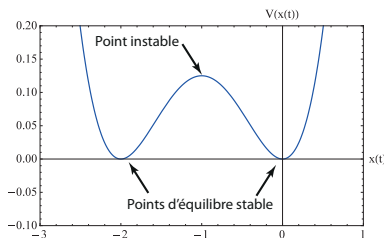
Dans l'espace des phases :

$$y(t) = \dot{x}(t)$$

$$\dot{y}(t) = -f(x(t)) - \varepsilon (\delta \dot{x}(t) - \gamma \cos \Omega t)$$

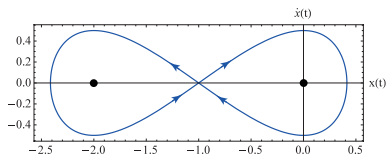
pour $\varepsilon = 0$ c'est un système Hamiltonien d'énergie $H(x, y) = y^2/2 + V(x)$.

$V(x) = x^2/2 + x^3/2 + x^4/8$ est un potentiel à deux puits



Méthode de Melnikov...

Si $\varepsilon = 0$, les orbites homocliniques : $x_{l,r}^h(t) = \pm\sqrt{2} \operatorname{sech}(t/\sqrt{2}) - 1$ séparent les différents types de mouvements du système.

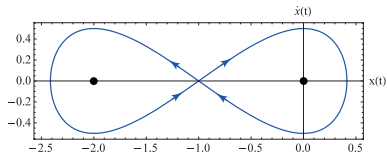


Si $\varepsilon \neq 0$, ces orbites se déstabilisent pour certaines valeur de δ et de γ .

Déséquilibre entre les énergies injectée et dissipée \Rightarrow dynamique chaotique.

Méthode de Melnikov...

Si $\varepsilon = 0$, les orbites homocliniques : $x_{l,r}^h(t) = \pm\sqrt{2} \operatorname{sech}(t/\sqrt{2}) - 1$ séparent les différents types de mouvements du système.



Si $\varepsilon \neq 0$, ces orbites se déstabilisent pour certaines valeur de δ et de γ .

Déséquilibre entre les énergies injectée et dissipée \Rightarrow dynamique chaotique.

Les zéros de la fonction de Melnikov

$$M^{l,r}(t_0, \phi_0) = -\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\dot{x}_{l,r}^h(t) \right)^2 dt \pm \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_{l,r}^h(t) \cos(\Omega(t+t_0) + \phi_0) dt$$

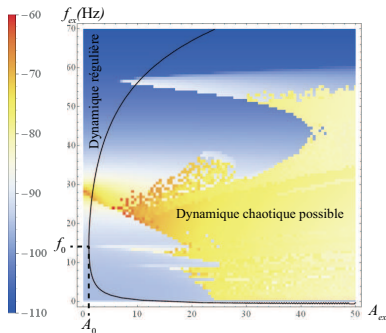
caractérisent la transition entre les dynamiques régulières et chaotiques.

$M^{l,r}(t_0, \phi_0)$ s'annule si

$$\frac{\gamma}{\delta} \geq \frac{\sqrt{2}}{3\pi\Omega} \cosh\left(\Omega\pi/\sqrt{2}\right)$$

Méthode de Melnikov...

À quoi tout ceci sert-il ?



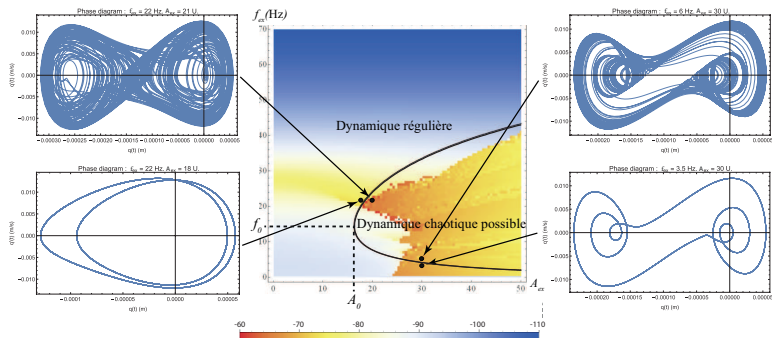
On montre que, pour $f \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} f_0 &\approx \check{f}_N/2 \\ A_0 &\approx \pi\mu_N\check{f}_N \end{aligned}$$

L'apparition de la dynamique chaotique du NES est contrôlée par sa **résonance linéaire** !

Méthode de Melnikov...

À quoi tout ceci sert-il ?



NES avec un amortissement x 10

Méthode de Melnikov pour une excitation quasi-périodique

Et pour une excitation multifréquentielle ?

Méthode de Melnikov pour une excitation quasi-périodique

Et pour une excitation multifréquentielle ?

Il suffit de changer le terme de forçage :

$$\varepsilon\gamma\cos(\Omega t) \Rightarrow \varepsilon\gamma(\cos(\Omega t) + \alpha\cos(\beta\Omega t)), 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta < \infty$$

On obtient une condition nécessaire similaire à l'excitation monofréquentielle :

$$\frac{\gamma}{\delta} \geq \frac{\sqrt{2}}{3\pi\Omega} \frac{1}{\left(\operatorname{sech}\left(\frac{\Omega\pi}{\sqrt{2}}\right) + \alpha\beta \operatorname{sech}\left(\beta\frac{\Omega\pi}{\sqrt{2}}\right) \right)}$$

Méthode de Melnikov pour une excitation quasi-périodique

Et pour une excitation multifréquentielle ?

Il suffit de changer le terme de forçage :

$$\varepsilon\gamma\cos(\Omega t) \Rightarrow \varepsilon\gamma(\cos(\Omega t) + \alpha\cos(\beta\Omega t)), 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta < \infty$$

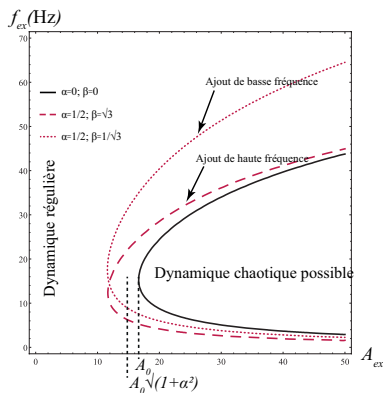
On obtient une condition nécessaire similaire à l'excitation monofréquentielle :

$$\frac{\gamma}{\delta} \geq \frac{\sqrt{2}}{3\pi\Omega} \frac{1}{\left(\operatorname{sech}\left(\frac{\Omega\pi}{\sqrt{2}}\right) + \alpha\beta \operatorname{sech}\left(\beta\frac{\Omega\pi}{\sqrt{2}}\right) \right)}$$

Augmentation de l'énergie injectée :

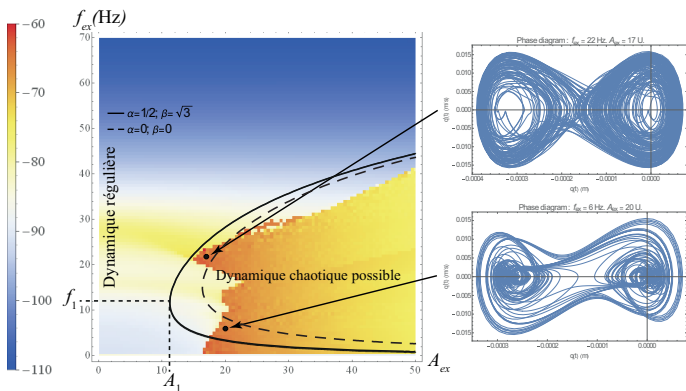
$$\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_{ex}^2 (\cos(\omega t) + \alpha\cos(\beta\omega t))^2 dt \right]^{1/2} = \frac{A_{ex}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \alpha^2}$$

Méthode de Melnikov pour une excitation quasi-périodique...



Décalage vers les basses amplitudes de la courbe de Melnikov (plus que le simple ajout d'énergie en $\sqrt{1+\alpha^2}$)

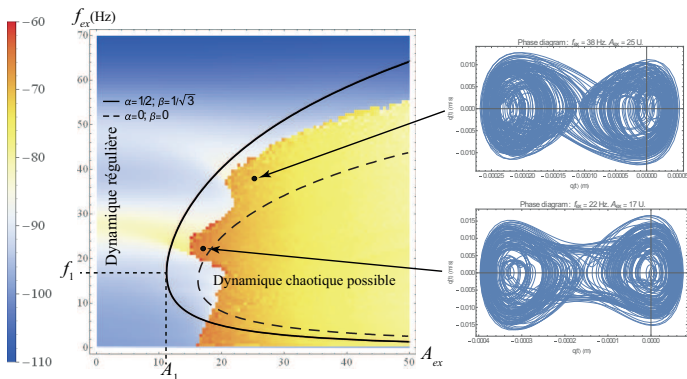
Méthode de Melnikov pour une excitation quasi-périodique...



$$f_1 \approx f_0 \sqrt{\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha\beta^3}} < f_0, \alpha\beta > 1$$

$$A_1 \approx A_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha\beta^3} \frac{3}{2} \left(\operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha\beta^3}} \right) + \alpha\beta \operatorname{sech} \left(\beta \sqrt{\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha\beta^3}} \right) \right)}} < A_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

Méthode de Melnikov pour une excitation quasi-périodique...

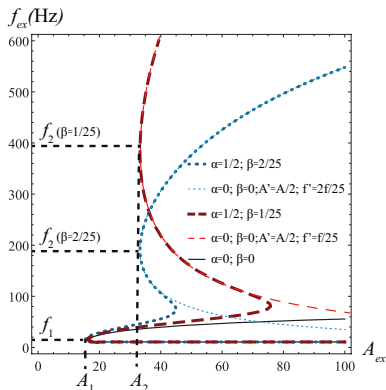


$$f_1 \approx f_0 \sqrt{\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha\beta^3}} > f_0, \alpha\beta < 1$$

$$A_1 \approx A_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha\beta^3}} \frac{3}{2} \left(\operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha\beta^3}} \right) + \alpha\beta \operatorname{sech} \left(\beta \sqrt{\frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha\beta^3}} \right) \right)} < A_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

Méthode de Melnikov pour une excitation quasi-périodique...

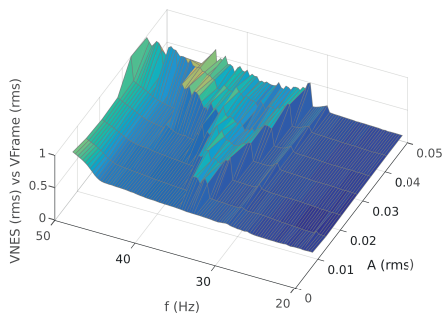
Si $\beta \ll 1$, la courbe de Melnikov présente un second minimum



$$f_2 \approx \frac{f_0}{\beta}$$

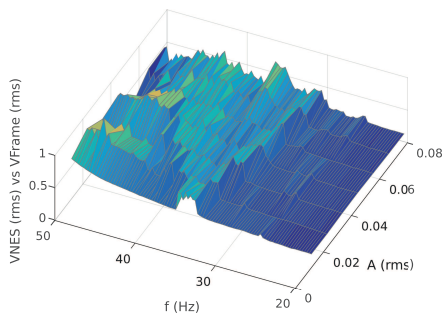
$$A_2 \approx \frac{A_0}{\alpha}$$

Expérience pour une excitation quasi-périodique...



Une première expérience
 $\alpha = 0, \beta = 0$

Expérience pour une excitation quasi-périodique...



Une première expérience
 $\alpha = 0.5, \beta = 0.14$

La zone chaotique est clairement étendue.

Commentaires généraux sur les absorbeurs dynamiques non linéaires bi-stables

- ▶ Principe de bistabilité très prometteur
 - ▶ Effet de seuil moins marqué qu'un NES "impair"
 - ▶ Adaptabilité à une très large gamme fréquentielle
 - ▶ Fonctionnement en multifréquentiel (forçages pseudo-périodiques ou en "dents de scie")
 - ▶ Mouvements chaotiques
- ▶ Gros travail encore à fournir pour modéliser et optimiser les NES
 - ▶ Nombreux paramètres de réglages, certains nécessitant du "savoir-faire"
 - ▶ Méthode de Melnikov apte à prédire les seuils d'activation
 - ▶ Plus vraiment de "pompage énergétique"
 - ▶ Incertitudes. Optimisation par SVM (construction de la frontière séparant deux classes de comportement) & Krigage (interpolation statistique d'une surface) ?

Merci de votre attention