

---

# Flambage et vibrations non-linéaires d'une plaque stratifiée piézoélectrique. Application à un bio-capteur MEMS

Olivier Thomas<sup>‡</sup> — Liviu Nicu<sup>‡</sup> — Cédric Ayela<sup>‡</sup> — Cyril Touzé<sup>‡</sup>

<sup>‡</sup>Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, EA 3196  
Conservatoire National des Arts et Métiers, 2 rue Conté 75003 Paris  
olivier.thomas@cnam.fr

<sup>‡</sup>Laboratoire d'Analyse et Architecture des Systèmes, UPR 8001,  
7 avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse  
{nicu,ayela}@laas.fr

<sup>‡</sup>Unité de Mécanique, ENSTA, Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau Cedex  
cyril.touze@ensta.fr

---

**RÉSUMÉ.** Cette étude propose une modélisation du comportement vibratoire non-linéaire d'une plaque circulaire, stratifiée et non-symétrique dans l'épaisseur, munie d'une pastille piézoélectrique circulaire au centre.

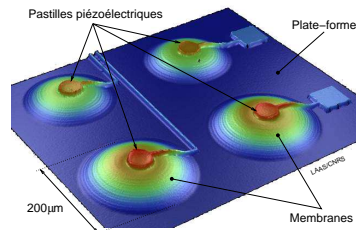
**ABSTRACT.** This study proposes a model of a circular, non-symmetrically laminated, piezoelectric plate, subjected to non-linear large amplitude vibrations. This model is built to simulate the behavior of a MEMS bio-sensor, designed to detect, automatically and autonomously, the presence of a given molecule in an aqueous solution. Because of both the laminated structure and the fabrication process, prestresses are observed, with different signs and intensities from one layer to another. This is responsible of a non-planar deformed geometry of the plate at rest. Moreover, experimental results show that it is necessary to make the system vibrating in a large amplitude non-linear regime to obtain a large enough signal-to-noise ratio. A continuous non-linear model of the von-Kármán type is used and discretized by an expansion of the solution onto the mode shape basis of the plate without prestresses.

**MOTS-CLÉS :** plaque stratifié, non-linéarités géométriques, flambage, vibrations, piézoélectrique

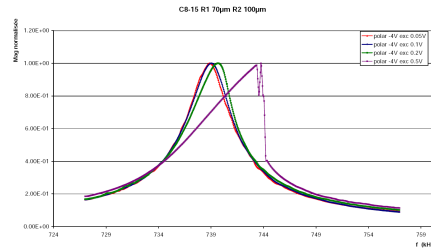
**KEYWORDS:** laminated plate, geometrical non-linearities, buckling, vibrations, piezoelectric

---

## 1. Introduction



**Figure 1.** Bio-capteur constitué de quatre membranes résonantes ; mesure à l'interféromètre holographique : notez la configuration flambée des membranes.

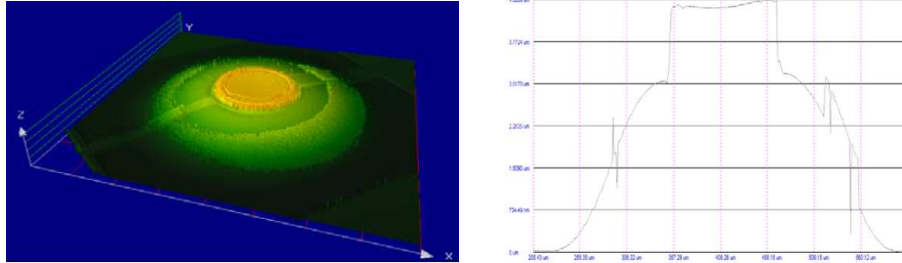


**Figure 2.** Courbes de résonances obtenues par balayage fréquentiel croissant, pour plusieurs valeurs d'amplitude du forçage.

Dans ce travail, on se propose d'étudier le comportement vibratoire non-linéaire d'une plaque circulaire stratifiée en matériau piézoélectrique. Il s'agit de modéliser et simuler le fonctionnement d'un bio-capteur MEMS (Micro-Electro Mechanical System) permettant de détecter, de façon automatique et autonome, la présence d'une molécule donnée contenue dans une solution aqueuse.

Le bio-capteur qu'il s'agit d'étudier est constitué de plusieurs membranes circulaires, d'environ  $200\mu\text{m}$  de diamètre et d'épaisseur de l'ordre du  $\mu\text{m}$ , inscrites dans une plate-forme de silicium (fig. 1). Ces membranes sont entraînées en vibrations sur leur mode fondamental grâce à l'action d'une pastille piézoélectrique. Elles sont de plus recouvertes d'une espèce biologique (le ligand) capable de reconnaître et d'immobiliser une molécule donnée (la biomolécule). Lorsque les membranes sont en contact avec une solution aqueuse contenant des biomolécules, celles-ci sont captées par le ligand et les membranes s'en trouvent alors alourdies. En détectant les vibrations des membranes, on peut mesurer la variation de fréquence de résonance qui s'ensuit et ainsi estimer la quantité de biomolécule présente dans le liquide. Parmi les technologies actuelles utilisées pour réaliser le capteur, l'utilisation de micro-systèmes (MEMS), de la taille voisine du micromètre, offre énormément d'avantages : une vitesse accrue des réactions chimiques à cette échelle, une grande sensibilité, un rapport signal sur bruit élevé, une intégration aisée de plusieurs capteurs sur une surface réduite. Il est possible d'utiliser d'autres géométries de capteur, notamment en forme de poutre encastree/libre (Nicu *et al.*, 2004). Néanmoins, le choix de membranes circulaires paraît être prometteur, notamment en terme de facteur de qualité, et c'est ce qui motive la présente étude (Ayela *et al.*, 2006).

À l'heure actuelle, alors que les technologies pour fabriquer un tel système sont bien maîtrisées (Nicu *et al.*, 2005), son comportement mécanique est encore mal connu et une modélisation mécanique complète est nécessaire pour affiner sa mise au point (Ayela *et al.*, 2006). La première difficulté vient de la structure stratifiée des membranes. En effet, du fait du procédé de fabrication, des précontraintes positives et



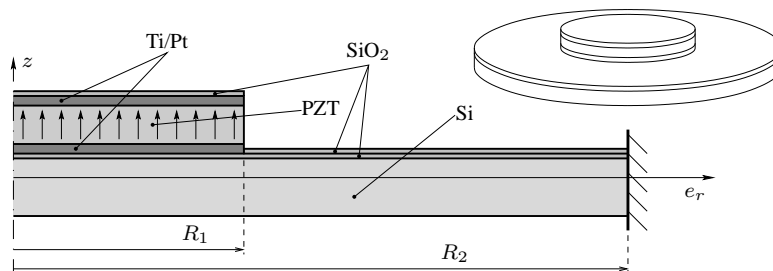
**Figure 3.** Vue tridimensionnelle et profil d'une membrane au repos.

négatives, différente d'une couche à l'autre, sont présentes à l'état de repos. La seconde difficulté provient de la pastille piézoélectrique circulaire placée au milieu de la membrane, qui est polarisée *après* insertion dans le système, produisant ainsi des précontraintes additionnelles. La première conséquence de ces diverses précontraintes est que l'état de repos de la membrane n'est pas plan (fig. 3). C'est cette position flambée qu'il s'agit de décrire en premier lieu.

Ensuite, le fonctionnement de la membrane consiste à l'exciter en vibration sur son mode fondamental, grâce à la pastille piézoélectrique, pour mesurer une variation de fréquence de résonance produite par un alourdissement de la membrane, dû à la capture de molécules à doser. Le modèle que l'on cherche à établir doit donc permettre d'évaluer les fréquences de résonance de la structure autour de la position de repos flambée.

Enfin, pour obtenir une mesure de variation de fréquence de résonance avec un rapport signal sur bruit correct, des premières mesures ont montré qu'il était nécessaire de faire fonctionner la membrane en régime de vibration non-linéaire de grande amplitude. Notamment, des courbes de résonance incurvées ont été observées (fig. 2), montrant des effets raidissant et assouplissant non-négligeables. Dans cette étude, on se propose de mettre en place le cadre général de modélisation.

## 2. Modèle théorique



**Figure 4.** Vue tridimensionnelle et en demi-coupe d'une membrane, montrant la structure stratifiée et les différents matériaux, en configuration initiale, non chargée.

On considère une plaque circulaire stratifiée munie en son centre d'une pastille circulaire piézoélectrique (fig. 4). Les couches de silicium (Si), oxyde de silicium (SiO<sub>2</sub>) et les électrodes de titane/platine (Ti/Pt) sont homogènes et isotropes. Ces deux électrodes, branchées à un générateur extérieur, permettent de créer dans la couche de matériau piézoélectrique (PZT) un champ électrique dirigé suivant  $z$ . Cela permet d'une part de polariser la couche PZT et d'autre part de la déformer dans la direction longitudinale (suivant  $e_r$ ) pour entraîner le système en vibration. La couche PZT est constituée d'un matériau homogène et isotrope transverse dans le plan normal à  $z$ . Pour la partie mécanique, on utilise le modèle classique des plaques stratifiées (Reddy, 1997) avec des déformations de type von Kármán. Pour la partie électrique, on suppose que le champ électrique est constant suivant  $z$ . Tout point du plan moyen de la plaque est repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . La géométrie du système est axisymétrique et composée de deux zones : la zone circulaire centrale  $\mathcal{D}_1 = [0, R_1] \times [0, 2\pi[$  et la zone annulaire périphérique  $\mathcal{D}_2 = [R_1, R_2] \times [0, 2\pi[$ . Le domaine de la plaque est noté  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ . La plaque est supposée encadrée sur son pourtour, en  $r = R_2$ . En supposant que la transformation que subit la plaque est axisymétrique, les déformations en un point de coordonnées  $(r, \theta, z)$  s'écrivent  $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_r \varepsilon_\theta\}^t = \underline{\varepsilon} + z\underline{\kappa}$ , avec  $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_r \varepsilon_\theta\}^t$  et  $\underline{\kappa} = \{\kappa_r \kappa_\theta\}^t$  et

$$\varepsilon_r = u_{r,r} + 1/2w_{,r}^2, \quad \varepsilon_\theta = u_r/r, \quad \kappa_r = -w_{,rr}, \quad \kappa_\theta = -w_{,r}/r, \quad [1]$$

où  $u_r$  est le déplacement radial et  $w$  le déplacement transverse d'un point du plan moyen.  $\circ_{,r}$  représente la dérivée de  $\circ$  par rapport à  $r$ . La loi de comportement s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \mathbf{Q}(\underline{\varepsilon} + z\underline{\kappa}) - \sigma_{0P}\underline{1}, \quad \text{avec} \quad \sigma_{0P} = \sigma_0 + \frac{e_{31}}{h_p}V(t), \quad [2]$$

où  $\underline{\sigma} = \{\sigma_r \sigma_\theta\}^t$  est le vecteur des contraintes,  $\mathbf{Q}$  est l'opérateur de Hooke et  $\underline{1} = \{1 \ 1\}^t$ .  $\sigma_0$  représente les précontraintes de fabrications,  $V(t)$  est la différence de potentiel entre les électrodes,  $e_{31}$  est la constante piézoélectrique et  $h_p$  est l'épaisseur de la couche PZT. En intégrant l'équation [2] suivant l'épaisseur, on obtient la loi de comportement, en terme des efforts de membrane  $\underline{N} = \{N_r \ N_\theta\}^t$  et des moments fléchissant  $\underline{M} = \{M_r \ M_\theta\}^t$  et des matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  (Reddy, 1997) :

$$\underline{N} = \mathbf{A}\underline{\varepsilon} + \mathbf{B}\underline{\kappa} - N_{0P}\underline{1}, \quad \underline{M} = \mathbf{B}\underline{\varepsilon} + \mathbf{D}\underline{\kappa} - M_{0P}\underline{1}, \quad [3]$$

où  $N_{0P}$  et  $M_{0P}$  sont créés par les précontraintes et les efforts piézoélectriques issus de  $\sigma_{0P}$ . En inversant l'équation [3], on obtient (Chia, 1980) :

$$\underline{\varepsilon} = \mathbf{A}^*\underline{N} + \mathbf{B}^*\underline{\kappa} + A^+N_{0P}\underline{1}, \quad \underline{M} = -\mathbf{B}^{*t}\underline{N} + \mathbf{D}^*\underline{\kappa} - \tilde{M}_{0P}\underline{1}, \quad [4]$$

avec  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{B}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{B}^*$ ,  $A^+ = A_{11}^* + A_{12}^*$ ,  $\tilde{M}_{0P} = B^+N_{0P} + M_{0P}$  et  $B^+ = B_{11}^* + B_{12}^*$ . En injectant les équations [4] dans l'équation d'équilibre transverse et la condition de compatibilité, après adimensionnement et quelques calculs, on obtient :

$$L_D(w) + \varepsilon L_B(F) + \Delta M_{0P} + \varepsilon \Delta(B^+N_{0P}) + \bar{m}\ddot{w} = \varepsilon L(w, F) + p, \quad [5]$$

$$L_A(F) - L_B(w) + \Delta(A^+N_{0P}) = -1/2L(w, w). \quad [6]$$

où  $L_A$ ,  $L_B$  et  $L_D$  sont des opérateurs différentiels qui tiennent compte de la discontinuité des matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  en  $r = R_1$ . Lorsque ces dernières sont indépendantes de  $r$ ,  $L_A(\circ) = A_{11}^* \Delta \Delta \circ$ ,  $L_B(\circ) = B_{12}^* \Delta \Delta \circ$  et  $L_D(\circ) = D_{11}^* \Delta \Delta \circ$  avec  $\Delta$  l'opérateur laplacien.  $L(\circ, \circ)$  est l'opérateur bilinéaire classique associé aux équations de von Kármán (Touzé *et al.*, 2002).  $\bar{m}$  est la masse surfacique de la plaque,  $\ddot{w}$  est la dérivée seconde de  $w$  par rapport au temps et  $p$  une pression extérieure.  $F$  est une fonction d'Airy, relié à  $\underline{N}$  par  $N_r = F_{,r}/r$  et  $N_\theta = F_{,rr}$ .

Les conditions aux limites imposent d'une part que  $w$  et  $F$  soient finis en  $r = 0$  et d'autre part que sur le bord, en  $r = 1$  :  $w = 0$ ,  $w_{,r} = 0$ ,  $\epsilon_\theta = 0$  et  $\epsilon_r - (r\epsilon_\theta)_{,r} = 0$ .

### 3. Projection modale

De la même manière que dans (Touzé *et al.*, 2002) et (Thomas *et al.*, 2005), on cherche le déplacement  $w$  sous la forme d'un développement sur les modes propres  $(\Phi_s, \omega_s)$  de la structure en court-circuit ( $V(t) = 0$ ) et non précontrainte ( $\sigma_0 = 0$ ), de sorte que :

$$w(r, t) = \sum_{s=1}^{+\infty} \Phi_s(r) q_s(t). \quad [7]$$

En développant  $F$  sur des fonctions bien choisies et en utilisant l'orthogonalité des  $(\Phi_s, \omega_s)$ , on montre que les équations [5,6] sont équivalentes au système suivant, vérifié par les coordonnées modales  $q_s(t)$ ,  $\forall s \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_s(t) + 2\xi_s \omega_s \dot{q}_s(t) + \omega_s^2 q_s(t) &= k_0^s + k_P^s V(t) + \sum_{q=1}^{+\infty} [\alpha_{0q}^s + \alpha_{Pq}^s V(t)] q_q(t) \\ &+ \sum_{p,q=1}^{+\infty} \beta_{pq}^s q_p(t) q_q(t) + \sum_{p,q,r=1}^{+\infty} \Gamma_{pqr}^s q_p(t) q_q(t) q_r(t) + Q_s(t). \end{aligned} \quad [8]$$

Dans le système précédent, on a ajouté un terme d'amortissement modal ( $\xi_s$  est le facteur d'amortissement du  $s^e$  mode). On peut remarquer que les oscillateurs ne sont plus indépendant, ils sont couplés par différent termes. Les non-linéarités géométriques créent le terme cubique ( $\Gamma_{pqr}^s$ ), de façon analogue au cas d'une plaque homogène et isotrope (Touzé *et al.*, 2002). La stratification, si elle est non symétrique dans l'épaisseur (lorsque  $\mathbf{B} \neq 0$ ), ajoute des non-linéarités quadratique ( $\beta_{pq}^s$ ). La tension aux bornes de la pastille peut s'écrire  $V(t) = \hat{V} + \tilde{V}(t)$  où le terme constant  $\hat{V}$  permet de créer la polarisation des pastilles. Ce dernier terme, associé aux précontraintes de fabrication  $\sigma_0$ , ajoute un chargement constant ( $k_0^s, k_P^s \hat{V}$ ) et un terme de couplage linéaire ( $\alpha_{0q}^s, \alpha_{Pq}^s \hat{V}$ ), qui créent la position statique non plane de la plaque. Le terme linéaire peut être responsable d'un flambage de la plaque. Le chargement dynamique piézoélectrique  $\tilde{V}(t)$  est quand à lui responsable d'une excitation directe de la plaque ( $k_P^s \tilde{V}(t)$ ) et d'une excitation paramétrique ( $\alpha_{Pq}^s \tilde{V}(t)$ ).  $Q_s(t)$  est le chargement extérieur créé par la pression  $p$ . Les expressions de  $k_0^s, k_P^s, \alpha_{0q}^s, \alpha_{Pq}^s, \beta_{pq}^s, \Gamma_{pqr}^s$  et  $Q_s$  sont connues analytiquement en fonction des  $(\Phi_s, \omega_s)$ .

#### 4. Résolution

Une solution au problème défini par les équations [7,8] est obtenue en écrivant

$$w(r, t) = \hat{w}(r) + \tilde{w}(r, t) = \sum_{s=1}^{+\infty} \Phi_s(r) [\hat{q}_s + \tilde{q}_s(t)], \quad [9]$$

avec  $\hat{w}(r)$  la déformée statique de la plaque et  $\tilde{w}(r, t)$  ses oscillations autour de la position d'équilibre  $\hat{w}(r)$ . En injectant l'équation [9] dans [8], on obtient d'une part un système algébrique non-linéaire permettant de calculer les  $\hat{q}_s$  et de simuler le comportement de la figure 3. D'autre part, un système similaire à [8] et fonction des  $\hat{q}_s$  est obtenu et sa solution donne les  $\tilde{q}_s$ . La diagonalisation de la partie linéaire de ce dernier, en gardant suffisamment de modes  $\Phi_s$  dans le développement, permet d'obtenir les pulsations propre de la structure avec *précontrainte*. Ensuite la résolution du système non-linéaire, dans le cas particulier du forçage résonant d'un mode donné, sera conduite en utilisant le formalisme des modes non-linéaires et permettra de simuler les courbes de la figure 2.

Des résultats de validation du modèle exposé dans ce texte, en comparaison avec des travaux de la littérature, sont en cour d'obtention. Ils seront présentés à l'oral lors de la conférence. Notamment, des courbes de convergence en fonction du nombre de modes  $\Phi_s$  conservés dans les développement seront montrées. Enfin, les résultats du modèle, dans le cas spécifique du bio-capteur étudié, seront confrontés au résultats expérimentaux des figures 2 et 3.

#### 5. Bibliographie

- Ayela C., Nicu L., « Micromachined piezoelectric membranes with high nominal quality factors in newtonian liquid media : a Lamb's model validation at the microscale », *Sens. Act. B Chem.*, 2006. In press.
- Chia C. Y., *Nonlinear analysis of plates*, Mc Graw Hill, 1980.
- Nicu L., Bergaud C., « Modeling of a tuning fork biosensor based on the excitation of one particular resonance mode », *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 14, p. 1-10, 2004.
- Nicu L., Guirardel M., Chambosse F., Rougerie P., Hinh S., Trevisiol E., François J.-M., Majoral J.-P., Caminade A.-M., Cattani E., Bergaud C., « Resonating piezoelectric membranes for microelectromechanically-based bioassay : detection of streptavidin-gold nanoparticles interaction with biotinylated DNA », *Sensors and Actuators B : chemical*, vol. 110, n° 1, p. 125-136, 2005.
- Reddy J. N., *Mechanics of laminated composite plates*, CRC press, 1997.
- Thomas O., Touzé C., Chaigne A., « Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1 :1 :2 internal resonance », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, n° 11-12, p. 3339-3373, 2005.
- Touzé C., Thomas O., Chaigne A., « Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part 1 : theory », *J. Sound. Vib.*, vol. 258, n° 4, p. 649-676, 2002.