MS 205
Stabilité des structures
ENSTA ParisTech

EQUIPE PÉDAGOGIQUE

- **Cours :**
  Cyril Touzé
  `cyril.touze@ensta-paristech.fr`

- **Petites classes :**
  - Kim Pham
    `kim.pham@ensta-paristech.fr`
  - Cyril Touzé

Plan du cours

Stabilité des structures

- problème général de la stabilité :
  sous l'effet de perturbations (à définir...), l'état d'un système va-t-il perdurer ou être modifié ?

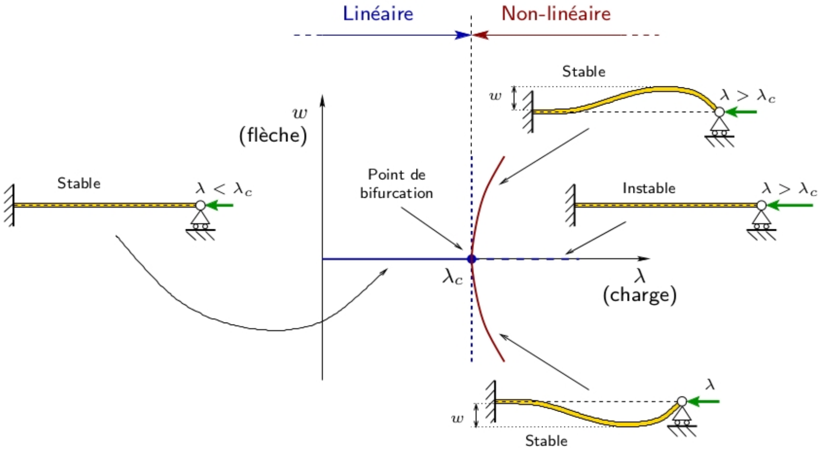
Stabilité des structures

- problème général de la stabilité :
  sous l'effet de perturbations (à définir...), l'état d'un système va-t-il perdurer ou être modifié ?
- Sous l'action d'efforts extérieurs:
  –statique
  –dynamique
- une structure initialement stable peut montrer:
  - une déformation statique (cas du flambement)
  - des oscillations
    (instabilité paramétrique, instabilité de flottement, ...)

PLAN DE LA PRÉSENTATION

Plan de la présentation

FLAMBEMENT D'UNE POUTRE DROITE



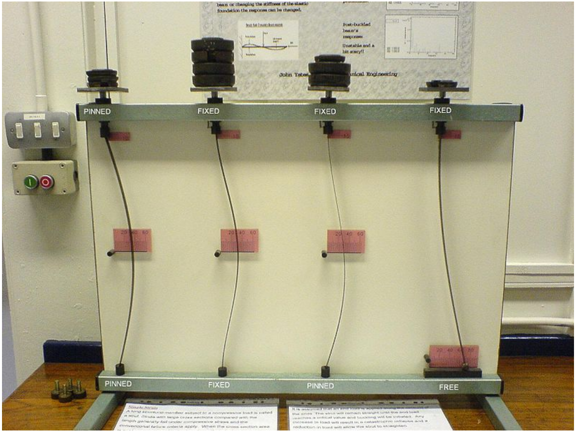
Flambement d'une poutre droite

Questions auxquelles le cours souhaite répondre:

- Peut-on prévoir la charge critique ?
- Que se passe-t-il au point de bifurcation ?
- Peut-on décrire et calculer les branches bifurquées ? Quelle sera leur forme ?

FLAMBEMENT D'UNE POUTRE DROITE

Influence des conditions aux limites



FLAMBAGE DE COQUE MINCE

Réservoirs cylindriques de vin en acier, Californie, 1979

Expérience contrôlée en laboratoire

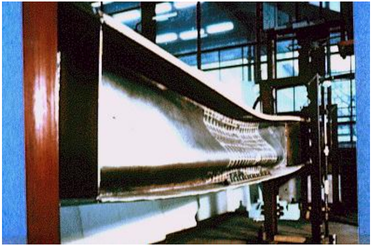
COQUE MINCE SOUS SON PROPRE POIDS

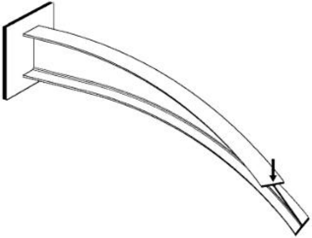
Flambage d'un conteneur

Flambage d'une éolienne

Voilement et déversement

- Voilement : flambement d'une structure élancée bidimensionnelle (plaque ou coque)
- Déversement : flambement mêlant mouvement de flexion et de torsion.





FLAMBAGE THERMIQUE

(a)

(b)

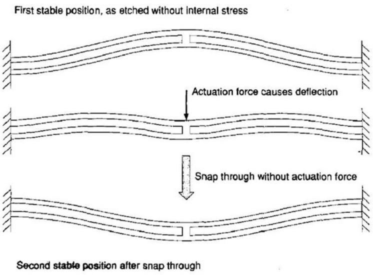
EN INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

- Instabilité du tuyau d'arrosage

- Flottement d'une aile d'avion

STRUCTURES BI-STABLES ET CLAQUAGE

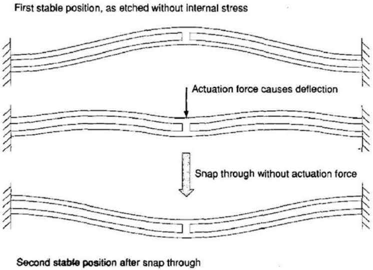
- Structures bi-stable (snap-through behaviour)



Exemple :
barrette clip-clap

STRUCTURES BI-STABLES ET CLAQUAGE

- Structures bi-stable (snap-through behaviour)



- Application possible: poisson-robot

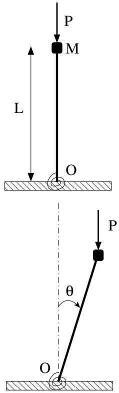
Exemple :
barrette clip-clap

Quelques idées importantes

- Dans ce cours: on se concentrera essentiellement sur le flambage.
- Calcul de la charge critique (point de bifurcation):
  $\rightsquigarrow$ théorie linéaire suffisante
- Calcul des branches bifurquées:
  $\rightsquigarrow$ théorie non linéaire nécessaire

Plan du cours

- Notions élémentaires de stabilité:
  définitions, méthodes de calcul (approche linéaire).
  Approche globale : théorème de Lagrange-Dirichlet.
  Systèmes dynamiques. Théorie des bifurcations.
- Exemples : systèmes à un degré de liberté. cas du pendule inversé
- Développements asymptotiques. Système à N degrés de liberté.
- Systèmes continus.
  Flambement des poutres droites.
  Plaques et coques. Méthode numérique de continuation.



PLAN DE LA PRÉSENTATION

RAPPELS : FORCES

- *Forces instationnaires* (non conservatives).
- *Forces stationnaires*:
  - forces dépendantes de la vitesse :
    - forces *dissipatives* (non conservatives).
    - forces *gyroscopiques* (force de Coriolis ou moment gyroscopique) : conservatives mais n'ont pas de potentiel (ne travaillent pas).
  - forces indépendantes de la vitesse :
    - efforts ne disposant pas de potentiel, non conservatives.
    - efforts dérivant d'un potentiel, conservatives.

RAPPELS : FORMALISME DE LAGRANGE

- système mécanique à N degrés de liberté, coordonnées généralisées $\{X_n\}_{n=1\dots N}$.
- Lagrangien

$$\mathcal{L} = E_c - E_p,$$

$E_c = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^t\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}$, avec $\mathbf{M}$ la matrice de masse.
E_p : énergie potentielle des forces dérivant d'un potentiel.

- Équations du mouvement:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}_n}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_n} = \hat{Q}_n,$$

avec $\hat{Q}_n$: efforts autres qu'inertiels et qui ne dérivent pas d'un potentiel.

RAPPELS : FORMALISME DE LAGRANGE

- système mécanique à N degrés de liberté, coordonnées généralisées $\{X_n\}_{n=1\dots N}$.
- Lagrangien
$$\mathcal{L} = E_c - E_p,$$
$E_c = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^t\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}$, avec $\mathbf{M}$ la matrice de masse.
E_p : énergie potentielle des forces dérivant d'un potentiel.
- Équations du mouvement:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}_n}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X_n} = \hat{Q}_n,$$
avec $\hat{Q}_n$: efforts autres qu'inertiels et qui ne dérivent pas d'un potentiel.
- Cas du métronome (pendule inversé) : calcul au tableau.

SYSTÈMES MÉCANIQUES

- Équations génériques pour un système conservatif à N ddls.
- Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^t\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}$.
- Énergie potentielle : $E_p(\mathbf{X}) = E_p^i(\mathbf{X}) + E_p^e(\mathbf{X})$

Systèmes mécaniques

- Équations génériques pour un système conservatif à N ddls.
- Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^t\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}$.
- Énergie potentielle : $E_p(\mathbf{X}) = E_p^i(\mathbf{X}) + E_p^e(\mathbf{X})$
- Termes du Lagrangien

1. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}$$
2. $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}} = -\underbrace{\frac{\partial E_p^i}{\partial \mathbf{X}}}_{\mathbf{KX}+f_{NL}(\mathbf{X})} - \underbrace{\frac{\partial E_p^e}{\partial \mathbf{X}}}_{\mathbf{F}_{ext}(\mathbf{X})}$$

Systèmes mécaniques

- Équations génériques pour un système conservatif à N ddls.
- Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^t\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}}$.
- Énergie potentielle : $E_p(\mathbf{X}) = E_p^i(\mathbf{X}) + E_p^e(\mathbf{X})$
- Termes du Lagrangien
  1. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{X}}}\right) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}$$
  2. $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}} = -\underbrace{\frac{\partial E_p^i}{\partial \mathbf{X}}}_{\mathbf{KX}+f_{NL}(\mathbf{X})} - \underbrace{\frac{\partial E_p^e}{\partial \mathbf{X}}}_{\mathbf{F}_{ext}(\mathbf{X})}$$
- Équations du mouvement

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{KX} + \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}_{ext}(\mathbf{X}, t)}$$

Systèmes dynamiques

- Formalisme des systèmes dynamiques

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, \lambda, t).$$

$\mathbf{Y} \in \mathcal{E}$, espace des phases (dimension n)
$\mathbf{F}$ champ de vecteur (non linéaire)
λ : paramètres

Systèmes dynamiques

- Formalisme des systèmes dynamiques

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}, \lambda, t).$$

  $\mathbf{Y} \in \mathcal{E}$, espace des phases (dimension n)
  $\mathbf{F}$ champ de vecteur (non linéaire)
  λ : paramètres

- Systèmes mécaniques, systèmes dynamiques

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix}$$

  Mise au premier ordre:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{X} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_{NL}(\mathbf{X}) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_{ext}(\mathbf{X}, t) \end{bmatrix}$$

- N degrés de liberté mécanique
  $\Longrightarrow$ espace des phases de dimension $n = 2N$.

PLAN DE LA PRÉSENTATION

Définitions de base

- Définitions de Lyapunov pour les systèmes dynamiques : $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$.
- Soit $\mathbf{X}_0$ point fixe : $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$.

DÉFINITIONS DE BASE

- Définitions de Lyapunov pour les systèmes dynamiques : $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$.
- Soit $\mathbf{X}_0$ point fixe : $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$.
- perturbation $\mathbf{X}'$ autour de $\mathbf{X}_0$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}'$$

DÉFINITIONS DE BASE

- Définitions de Lyapunov pour les systèmes dynamiques : $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$.
- Soit $\mathbf{X}_0$ point fixe : $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$.
- perturbation $\mathbf{X}'$ autour de $\mathbf{X}_0$:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}'$$

- Définitions (Lyapunov) :
  - $\mathbf{X}_0$ est *uniformément stable* si $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ T > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tel que:

$$||\mathbf{X}'(t=0)|| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad ||\mathbf{X}'(t)|| < \varepsilon \quad \forall t > T.$$

  - $\mathbf{X}_0$ est *asymptotiquement stable* si de plus:

$$||\mathbf{X}'(t)|| \longrightarrow 0 \qquad \text{pour} \quad t \longrightarrow \infty.$$

Plan de la présentation

MINIMUM DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE

- **Théorème de Lagrange-Dirichlet**
  Hypothèses:
  - Les énergies du système ne présentent pas de discontinuités,
  - Les forces en présence sont conservatives et/ou dissipatives.

  Théorème:
  Le système mécanique est stable en un point $\mathbf{X}$ *si son énergie potentielle présente un minimum strict.*

MINIMUM DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE

Remarques importantes :

- condition suffisante, pas nécessaire:
  minimum strict de $E_p \Rightarrow$ stabilité
  La réciproque n'est pas tout le temps vraie : stabilité n'implique pas que l'on ait un minimum strict...
  Ou encore si on prend la contraposée:
  une énergie potentielle avec un minimum non strict peut donner lieu à des équilibres stables ou instables... (contre-exemples dus à Lyapunov)

Minimum de l'énergie potentielle

Remarques importantes :

- condition suffisante, pas nécessaire:
  minimum strict de $E_p \Rightarrow$ stabilité
  La réciproque n'est pas tout le temps vraie : stabilité n'implique pas que l'on ait un minimum strict...
  Ou encore si on prend la contraposée:
  une énergie potentielle avec un minimum non strict peut donner lieu à des équilibres stables ou instables... (contre-exemples dus à Lyapunov)
- stabilité au sens *statique*.
  $\hookrightarrow$ OK pour les cas de flambement.
  par contre inadapté au cas des forces extérieures dépendants du temps.
- Théorème applicable uniquement pour le cas de forces conservatives et/ou dissipatives.
  PC 2 : contre-exemple, cas d'une force non conservative où le théorème ne s'applique pas...

Minimum de l'énergie potentielle

Remarques importantes :

- condition suffisante, pas nécessaire:
  minimum strict de $E_p \Rightarrow$ stabilité
  La réciproque n'est pas tout le temps vraie : stabilité n'implique pas que l'on ait un minimum strict...
  Ou encore si on prend la contraposée:
  une énergie potentielle avec un minimum non strict peut donner lieu à des équilibres stables ou instables... (contre-exemples dus à Lyapunov)
- stabilité au sens *statique*.
  $\hookrightarrow$ OK pour les cas de flambement.
  par contre inadapté au cas des forces extérieures dépendants du temps.
- Théorème applicable uniquement pour le cas de forces conservatives et/ou dissipatives.
  PC 2 : contre-exemple, cas d'une force non conservative où le théorème ne s'applique pas...
- Application : le cas du pendule inversé.

Plan de la présentation

STABILITÉ LOCALE

- Formalisme des systèmes dynamiques pour lever les restrictions du théorème de Lagrange-Dirichlet.
- Approche locale.
- Résultats de portée générale.

Stabilité locale

- Soit $\mathbf{X}_0$ point fixe : $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}'(t)$: perturbation autour du point fixe.

Stabilité locale

- Soit $\mathbf{X}_0$ point fixe : $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}'(t)$: perturbation autour du point fixe.

$$\dot{\mathbf{Y}} = \cancel{\dot{\mathbf{X}}_0} + \dot{\mathbf{X}}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}') = \cancel{\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}\right]_{\mathbf{X}_0} \mathbf{X}' + \mathcal{O}(\mathbf{X}'^2)$$

STABILITÉ LOCALE

- Soit $\mathbf{X}_0$ point fixe : $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$.
- $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}'(t)$: perturbation autour du point fixe.

$$\dot{\mathbf{Y}} = \cancel{\dot{\mathbf{X}}_0} + \dot{\mathbf{X}}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}') = \cancel{\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}\right]_{\mathbf{X}_0} \mathbf{X}' + \mathcal{O}(\mathbf{X}'^2)$$

- À l'ordre le plus bas:

$$\frac{d\mathbf{X}'}{dt} = \mathbf{L}\mathbf{X}', \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{L} = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}\right]_{\mathbf{X}_0}.$$

- Équation linéaire $\mapsto$ s'intègre en exponentielle de matrice.
- On note les valeurs propres de $\mathbf{L}$:

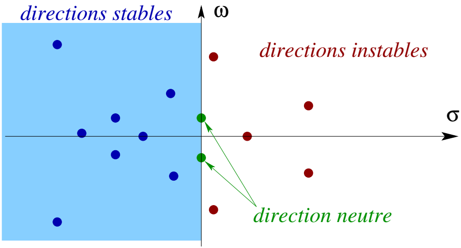
$$s_m = \sigma_m \pm i\omega_m, \quad m = 1...n$$

Dans la direction m, devenir de la perturbation contrôlé par:
$\mathrm{e}^{\sigma_m t}(\cos\omega_m t + i \sin\omega_m t)$
$\hookrightarrow$ la partie réelle σ_m indique la stabilité.

Stabilité locale

- Stabilité locale d'un point fixe:
  - $\sigma_m < 0$, la perturbation décroît, la direction est stable,
  - $\sigma_m > 0$, la perturbation croît, la direction est instable,
  - $\sigma_m = 0$, la direction est neutre ou marginale.

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{X}_0$ *est instable dès qu'il existe une valeur propre à partie réelle positive.*



STABILITÉ LOCALE

- En se plaçant dans les conditions du théorème de Lagrange-Dirichlet: $\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^t\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}} - E_p(\mathbf{X})$.
- Équations du mouvement:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} - \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{0}.$$

STABILITÉ LOCALE

- En se plaçant dans les conditions du théorème de Lagrange-Dirichlet: $\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{X}}^t\mathbf{M}\dot{\mathbf{X}} - E_p(\mathbf{X})$.
- Équations du mouvement:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} - \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{0}.$$

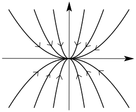
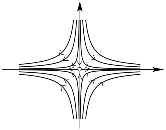
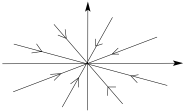
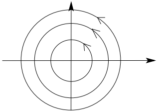
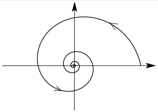
- Points fixes : $\frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{0}$
  $\rightsquigarrow$ extremas de l'énergie potentielle.
- stabilité donnée par la courbure locale pour savoir si le minimum est strict :
  $\rightsquigarrow$ valeurs propres de $\mathbf{L} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial \mathbf{X}^2}$.

Dynamique linéaire en dimension 2

- Système dynamique linéaire en dimension 2:

$$\dot{X}_1 = l_{11}X_1 + l_{12}X_2$$
$$\dot{X}_2 = l_{21}X_1 + l_{22}X_2$$

- valeurs propres : réelles ou complexes conjuguées.

Valeurs propres λ_1 , λ_2	Matrice L	représentation dans l'espace des phases	
réelles et distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$	 **noeud** stable si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ instable si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$	 **col** $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ instable
réelles et egales vecteurs propres distincts	$\begin{bmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{bmatrix}$	 **noeud ou étoile** stable si $\lambda < 0$	
complexes conjugúees $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2 = \lambda$	$\begin{bmatrix} \lambda & \\ & \overline{\lambda} \end{bmatrix}$	 **centre** si $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ marginalement stable	 **foyer** si $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ stable si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, instable sinon

Plan de la présentation

Stabilité structurelle

- variation d'un paramètre de contrôle
  $\rightsquigarrow$ changement qualitatif de la dynamique
  $\rightsquigarrow$ un point fixe peut changer de nature
  On a alors affaire à une **bifurcation**.

Stabilité structurelle

- variation d'un paramètre de contrôle
  $\rightsquigarrow$ changement qualitatif de la dynamique
  $\rightsquigarrow$ un point fixe peut changer de nature
  On a alors affaire à une **bifurcation**.
- Point fixe hyperbolique (ou non-dégénéré) : toutes ses valeurs propres sont à parties réelles non nulles.

Stabilité structurelle

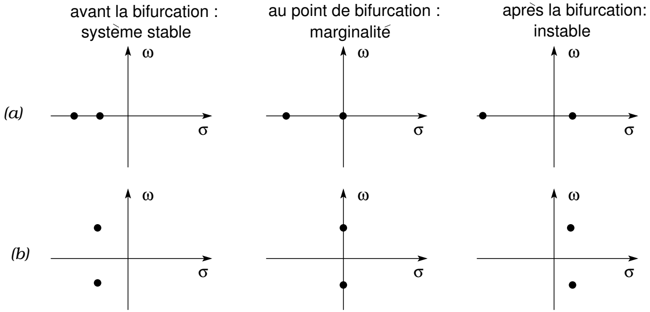
- variation d'un paramètre de contrôle
  $\rightsquigarrow$ changement qualitatif de la dynamique
  $\rightsquigarrow$ un point fixe peut changer de nature
  On a alors affaire à une **bifurcation**.
- Point fixe hyperbolique (ou non-dégénéré) : toutes ses valeurs propres sont à parties réelles non nulles.
- Un système est *structurellement stable* si tous les points fixes sont hyperboliques.

Stabilité structurelle

- variation d'un paramètre de contrôle
  $\leadsto$ changement qualitatif de la dynamique
  $\leadsto$ un point fixe peut changer de nature
  On a alors affaire à une **bifurcation**.
- Point fixe hyperbolique (ou non-dégénéré) : toutes ses valeurs propres sont à parties réelles non nulles.
- Un système est *structurellement stable* si tous les points fixes sont hyperboliques.
- condition nécessaire pour observer une bifurcation: *que le système soit structurellement instable*.

Codimension d'une bifurcation

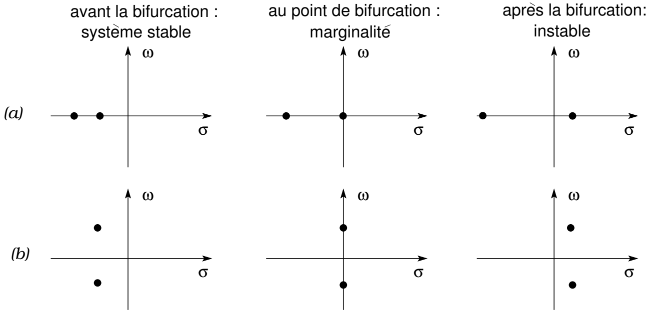
- nombre (minimal) de paramètres nécessaires pour la décrire.



(a) : bifurcation nœud-col
(b) : bifurcation de Hopf

CODIMENSION D'UNE BIFURCATION

- nombre (minimal) de paramètres nécessaires pour la décrire.



(a) : bifurcation nœud-col
(b) : bifurcation de Hopf

- Généralement : nb de valeurs propres qui traversent l'axe imaginaire.

Bifurcation nœud-col

- forme normale:

$$\dot{x} = \mu - x^2,$$

- diagramme de bifurcation

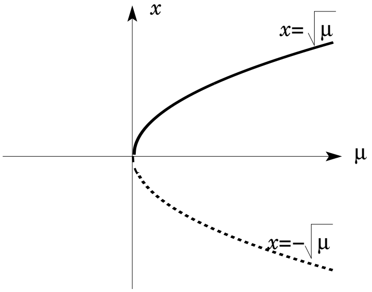


FIGURE: Bifurcation nœud-col

BIFURCATION FOURCHE

- forme normale:

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

- diagramme de bifurcation

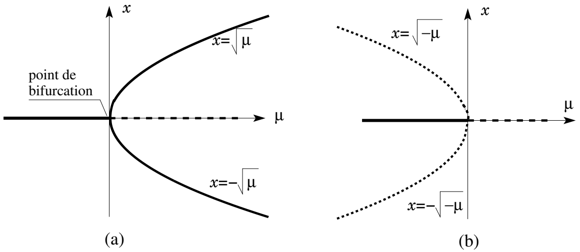


FIGURE: Bifurcation fourche, (a): supercritique, (b): sous-critique

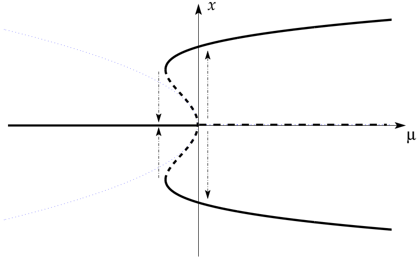
- cas sous-critique:

$$\dot{x} = \mu x + x^3$$

BIFURCATION FOURCHE SOUS-CRITIQUE

- Dans le cas de la bifurcation fourche sous-critique :
  $\rightsquigarrow$ prise en compte de l'ordre 5:

$$\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5,$$



- ordre 5 : saturation des branches.
- phénomènes de sauts : zone "dangereuse".
- bifurcations nœud-col.

BIFURCATION TRANSCRITIQUE

- forme normale:

$$\dot{x} = \mu x - x^2,$$

- diagramme de bifurcation

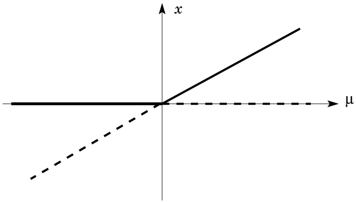


FIGURE: Bifurcation transcritique (échange de stabilité).

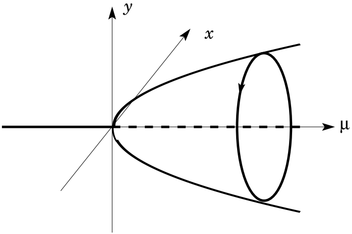
Bifurcation de Hopf

- forme normale:

$$\dot{x} = -y + x(\mu - (x^2 + y^2)), \tag{1}$$

$$\dot{y} = x + y(\mu - (x^2 + y^2)), \tag{2}$$

- diagramme de bifurcation



- On passe d'un point fixe à un cycle limite
  $\hookrightarrow$ Naissance des oscillations.

Bifurcation fourche imparfaite

- Perturbation à l'ordre le plus bas:

$$\dot{x} = \mu x - x^3 + \varepsilon.$$

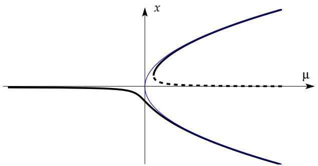


FIGURE: Bifurcation fourche imparfaite, $\varepsilon < 0$. En bleu clair est représentée la bifurcation parfaite associée ($\varepsilon = 0$).