

# Vibrations non linéaires de steelpans : couplages modaux via la résonance interne 1:2:2

M. Monteil<sup>a,c</sup>, C. Touzé<sup>a</sup>, O. Thomas<sup>b</sup>, J. Frelat<sup>c</sup>

a. UME-ENSTA-ParisTech, Chemin de la Hunière, 91761 PALAISEAU CEDEX, FRANCE

b. LMSSC-CNAM, 2 rue conté, 75003 PARIS, FRANCE

c. MISES-IJLRDA, 4 place jussieu, 75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

## Résumé :

*Nous étudions des couplages modaux non linéaires intervenant dans des vibrations de grandes amplitudes de coques minces. L'objet de ce travail est un steelpan, instrument à percussion fabriqué à partir de bidons métalliques. Les instabilités et les branches de solutions couplées dues à la présence de résonances 1:2:2 sont étudiées théoriquement et expérimentalement.*

## Abstract :

*Modes coupling in geometrically nonlinear vibrations of thin shells are studied. Our work focuses on the case of steelpans, percussion instruments made from oil drums. Instabilities and coupled solutions branches due to 1:2:2 internal resonances are studied theoretically and experimentally.*

**Mots clefs : résonance interne ; couplages modaux ; instabilités**

## 1 Introduction

Les steelpans sont des instruments à percussions mélodiques qui proviennent de l'île de Trinidad et Tobago. Ils sont fabriqués à partir de bidons de pétroles qui subissent une succession de transformations qui étire et déforme le métal pour obtenir une cuve sphérique concave à l'intérieur de laquelle sont réparties les différentes notes de l'instrument. Chaque note est un dôme convexe obtenu par martelage de la coque principale.

Dans une série d'articles dont [1, 2], Achong montre que les steelpans opèrent à la manière d'un système non linéaire de modes localisés autour du point d'excitation. La non-linéarité géométrique entraîne des couplages entre les modes propres de la structure via des résonances internes dont l'incidence sur le timbre de ces instruments est primordiale. Par ailleurs, Rossing *et al.* [9] ont réalisé de nombreuses analyses modales sur différents steelpans de différents registres, vérifiant la localisation des modes et l'existence de rapports entiers entre les premières fréquences propres.

Nous avons mené des analyses modales sur un steelpan [7] (*double second* fig .1), mettant en évidence l'existence récurrente de trois modes dont les fréquences propres vérifient les relations  $f_1$ ,  $f_2 \approx 2f_1$  et  $f_3 \approx 2f_1$ , qui provoque une résonance interne 1:2:2 que l'on ne trouve pas analysée dans la littérature. Les cas les plus proches que nous avons recensés sont les résonances de type 1:2 [5, 8] et 1:1:2 [10]. Les développements théoriques, présentés ici, peuvent permettre de mieux comprendre les instabilités et les échanges d'énergie lorsque cette configuration de résonance se présente. Diverses applications, notamment dans l'ingénierie, sont possibles [3].

Nous considérons le steelpan comme une structure mince de géométrie courbe, dont le déplacement transverse  $w$  est défini, en un point  $\mathbf{x}_1$ , sous la forme de variables séparées en temps et en espace :

$$w(\mathbf{x}_1, t) = \sum_{k=1}^N \Phi_k(\mathbf{x}_1) q_k(t) \quad (1)$$

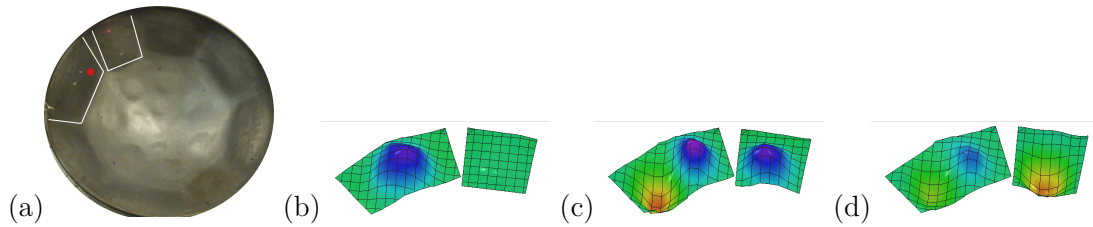


FIGURE 1 – Analyse modale d’un steelpan. (a) Le repère rouge indique la position de l’excitation ponctuelle réalisée au moyen d’un système bobine/aimant . Visualisation des trois premières déformées modales. (b) Mode 1 :  $f_1 = 196.7Hz$  ; (c) Mode 2 :  $f_2 = 388.7Hz$  ; (d) Mode 3 :  $f_3 = 395.7Hz$ .

où pour chaque mode  $k \in [1 : N]$ , l’amplitude  $q_k$  subit la contribution de la  $k^{\text{ième}}$  déformée modale  $\Phi_k$ . Dans le cas de la résonance 1:2:2, le modèle (1) se restreint à trois modes propres et la forme normale des amplitudes donne le système (2), dont les non-linéarités prépondérantes sont de type quadratique :

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \epsilon [-2\mu_1 \dot{q}_1 - \alpha_1 q_1 q_2 - \alpha_2 q_1 q_3 + Q_1(t)] \quad (2a)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \epsilon [-2\mu_2 \dot{q}_2 - \alpha_3 q_1^2 + Q_2(t)] \quad (2b)$$

$$\ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 = \epsilon [-2\mu_3 \dot{q}_3 - \alpha_4 q_1^2 + Q_3(t)] \quad (2c)$$

où  $\omega_k$  est la pulsation propre,  $\mu_k$  l’amortissement modal et  $Q_k$  un terme de forçage extérieur. Les coefficients  $\alpha_i$  permettent les échanges d’énergie entre les trois modes.  $\epsilon$  est un petit paramètre que l’on prendra par la suite égal à 1.

## 2 Résolution par la méthode des échelles multiples

On se propose de résoudre analytiquement le système (2) par la méthode des échelles multiples [8]. On sollicite les oscillateurs de manière harmonique, par  $Q_k = F_k \cos \Omega t$ , autour de leur fréquence de résonance ( $\Omega \approx \omega_{k=1,2,3}$ ). La résolution se fait selon deux échelles temps ( $T_0 = t$  et  $T_1 = \epsilon t$ ), de sorte que les amplitudes solutions de (2) s’écrivent sous la forme :  $q_k(T_0, T_1) = a_k(T_1) \cos(\omega_k T_0 + \theta_k(T_1))$ .

La résonance 1:2:2 implique que les fréquences sont telles que  $\omega_2 = 2\omega_1 + \epsilon\sigma_1$  et  $\omega_3 = 2\omega_1 + \epsilon\sigma_2$ , où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des paramètres de désaccords internes. Le forçage extérieur est appliqué par  $\Omega = \omega_k + \epsilon\sigma$ , où  $\sigma$  est le paramètre de désaccord externe, selon deux cas distincts. Le premier consiste à exciter le mode basse fréquence, avec  $Q_1 = F_1 \cos \Omega t$  et  $Q_2 = Q_3 = 0$ , où  $\Omega = \omega_1 + \sigma$ . Les solutions obtenues (3) montrent que les modes de haute fréquence oscillent à une fréquence double de la fréquence d’excitation. Dans le second cas, on sollicite les modes de haute fréquence. L’excitation est exercée par  $Q_2 = F_2 \cos \Omega t$  et  $Q_3 = F_3 \cos \Omega t$  et  $Q_1 = 0$ , où on choisit  $\Omega = \omega_2 + \epsilon\sigma$ , soit un écart par rapport à la troisième fréquence quantifié via :  $\Omega = \omega_3 + \epsilon(\sigma + \sigma_1 - \sigma_2)$ . Les solutions (4) montrent que le mode de basse fréquence oscille à une fréquence moitié de la fréquence d’excitation.

Les amplitudes  $a_k$  et les phases  $\psi_k$ , sont solutions d’un système dynamique, qui permet de les calculer en fonction du paramètre de désaccord  $\sigma$  et des paramètres du système, ainsi que de déterminer des éventuelles instabilités et bifurcations.

$$\begin{cases} q_{10} = a_1 \cos(\Omega t + \psi_1) \\ q_{20} = a_2 \cos(2\Omega t + \psi_2) \\ q_{30} = a_3 \cos(2\Omega t + \psi_3) \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} q_{10} = a_1 \cos(\frac{\Omega}{2} t + \psi_1) \\ q_{20} = a_2 \cos(\Omega t + \psi_2) \\ q_{30} = a_3 \cos(\Omega t + \psi_3) \end{cases} \quad (4)$$

### 2.1 Excitation Basse Fréquence ( $\Omega \approx \omega_1$ )

Une propriété caractéristique du système excité en basse fréquence est qu’il n’existe que des branches couplées telles que  $a_1, a_2, a_3 \neq 0$ . Même pour de faibles forçages (fig. 2 (a)), l’énergie est transmise aux

modes de haute fréquence. Ainsi des composantes de fréquence double ( $2\Omega$ ) apparaissent dans la solution (3). Sur la figure 2, les paramètres sont tels que les oscillateurs 2 et 3 sont strictement identiques, c'est pourquoi les courbes des amplitudes  $a_2$  et  $a_3$  se superposent parfaitement.

Plus on augmente le forçage extérieur (fig. 2 (b)), plus l'énergie transmise aux modes 2 et 3 est importante. À partir d'une valeur seuil, le système devient instable, il présente des bifurcations qui favorisent le couplage et provoquent des phénomènes de saut entre les solutions stables. En regardant l'évolution des valeurs propres de la matrice jacobienne du système à l'échelle de temps  $T_1$  (fig. 2 (c1) et (c2)), on remarque qu'il existe deux types d'instabilités : une bifurcation noeud-col où les valeurs propres traversent l'axe imaginaire du plan complexe le long de l'axe réel, et une bifurcation de Hopf où deux valeurs propres complexes conjuguées traversent l'axe imaginaire simultanément.

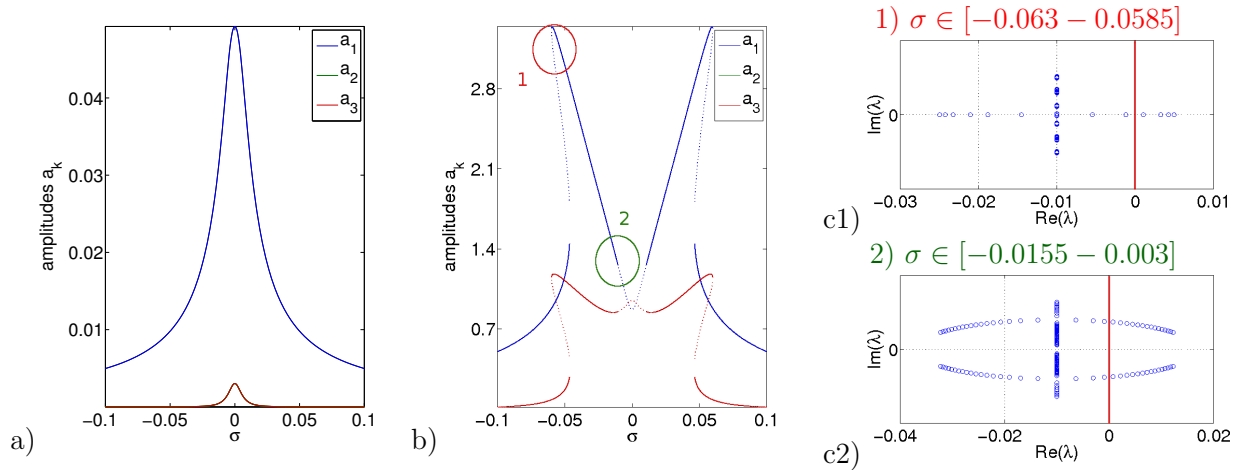


FIGURE 2 – Excitation BF :  $\Omega \approx \omega_1$ . Influence du forçage. Paramètres :  $\omega_1 = 1$  ;  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  ;  $\mu_k = 0.01$  ;  $\alpha_i = 0.1$ . (a)  $F_1 = 0.001$  : Couplage vers les modes 2 et 3 ; (b)  $F_1 = 0.1$  : Système instable ; (c) Trajet des valeurs propres dans le plan complexe : bifurcations noeud-col (c1) et Hopf (c2).

On regarde maintenant le cas où les modes 2 et 3 diffèrent par leurs désaccords internes ( $\sigma_2 \neq \sigma_3$ ). Sur la figure 3, on remarque que le système n'est plus symétrique et que les amplitudes  $a_2$  et  $a_3$  ont des comportements différents. Aussi, dès que le désaccord est suffisamment grand pour éloigner la résonance d'un des modes de haute fréquence ( $\omega_3 = 2\omega_1 + \sigma_2$ ) loin de la résonance idéale ( $2\omega_1$ ) (fig. 3 (b)), le couplage tend à disparaître et on retrouve un comportement global semblable au cas de la résonance 1:2 [8, 5]. Enfin, toujours en écartant l'une des deux résonances haute fréquence, on peut observer une restabilisation du système, au voisinage de  $\sigma = 0$ , entre deux bifurcations de Hopf (fig. 3 (c)).

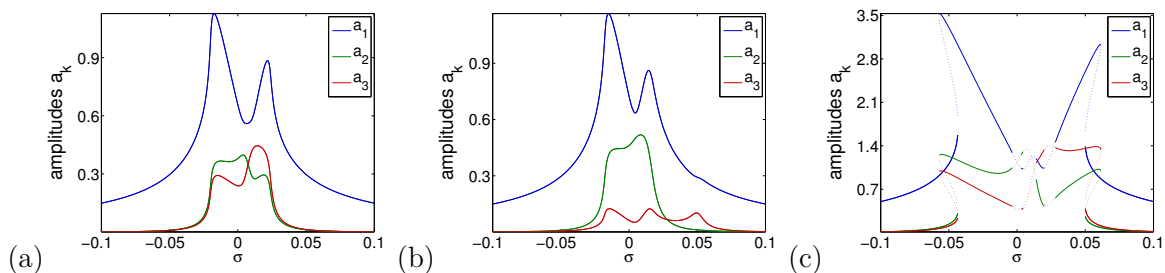


FIGURE 3 – Excitation BF :  $\Omega \approx \omega_1$ . Influence du désaccord interne. Paramètres :  $\omega_1 = 1$  ;  $\mu_k = 0.01$  ;  $\alpha_i = 0.1$ . (a)  $F_1 = 0.03$  ;  $\sigma_1 = 0.01$  ;  $\sigma_2 = 0.02$  :  $a_2 \neq a_3$  ; (b)  $F_1 = 0.03$  ;  $\sigma_1 = 0.01$  ;  $\sigma_2 = 0.1$  : Retour sur la résonance 1:2 ; (c)  $F_1 = 0.1$  ;  $\sigma_1 = 0.01$  ;  $\sigma_2 = 0.04$  : Stabilisation de la branche instable.

## 2.2 Excitation Haute Fréquence : $\Omega \approx \omega_2 \approx \omega_3$

On se place désormais dans le cas où les modes 2 et 3 sont excités. Contrairement au cas précédent, où il n'existe que des solutions couplées, la résolution du système au premier ordre montre que des solutions non couplées, telles que  $a_1 = 0$ , sont possibles. Les amplitudes  $a_2$  et  $a_3$  vérifient alors les relations (5) : c'est-à-dire exactement les solutions linéaires, conformément aux équations (2b) et (2c),  $a_1 = 0$  implique que les oscillations 2 et 3 répondent linéairement au forçage. On observe que les maxima sont localisés en  $\sigma = 0$  pour  $a_{2lin}$  et  $\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$  pour  $a_{3lin}$ .

$$a_{2lin} = \frac{F_2}{2\omega_2\sqrt{\mu_2^2 + \sigma^2}} \text{ et } a_{3lin} = \frac{F_3}{2\omega_3\sqrt{\mu_3^2 + (\sigma + \sigma_1 - \sigma_2)^2}} \quad (5)$$

La solution de base est telle que  $a_2 \neq 0$  et  $a_3 \neq 0$ , son étude de stabilité doit être menée dans l'espace  $(\sigma, a_2, a_3)$ . Lorsque la solution (5) devient instable, des solutions couplées telles que  $a_1 \neq 0$  apparaissent, ce qui se traduit dans la réponse (4) par l'apparition d'une composante de fréquence moitié ( $\Omega/2$ ). On montre que la limite de stabilité (6) est définie dans l'espace  $(\sigma, a_2, a_3)$  par la surface :

$$S_{lim} = \{(\sigma, a_2, a_3) | T_1 = T_2 a_2^2 + T_3 a_3^2\} \quad (6)$$

où :  $T_1 = 4\omega_1^2(4\mu_1^2 + (\sigma_1 + \sigma)^2)$ ;  $T_2 = \alpha_1^2$ ;  $T_3 = \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \frac{\omega_3 F_2}{\omega_2 F_3} T$ , avec  $T = \frac{\mu_2\mu_3 + \sigma(\sigma + \sigma_1 - \sigma_2)}{\mu_2^2 + \sigma^2}$ .

Le système est instable dès qu'il franchit la surface  $S_{lim}$  (fig. 4 (a)). Dans les plans  $\{\sigma, a_2\}$  et  $\{\sigma, a_3\}$ , la surface est bornée par des courbes limites  $c_{2lim} = S_{lim} \cap \{a_2 = 0\} = \sqrt{T_1/T_2}$  et  $c_{3lim} = S_{lim} \cap \{a_3 = 0\} = \sqrt{T_1/T_3}$ . Par rapport à la résonance 1:2, la présence de l'oscillateur 3 introduit une dimension supplémentaire rendant le système plus instable via la géométrie complexe de  $c_{3lim}$  et le fait que la solution de base (5) se décale du plan  $\{a_3 = 0\}$ . Nous parvenons à déterminer la zone de couplage du système global en injectant les expressions linéaires (5) dans (6). Ainsi on obtient de nouvelles courbes limites  $s_{2lim}$  et  $s_{3lim}$  dans des espaces bidimensionnels, permettant un traitement algorithmique plus simple des points limites de stabilité (fig. 4 (b)).

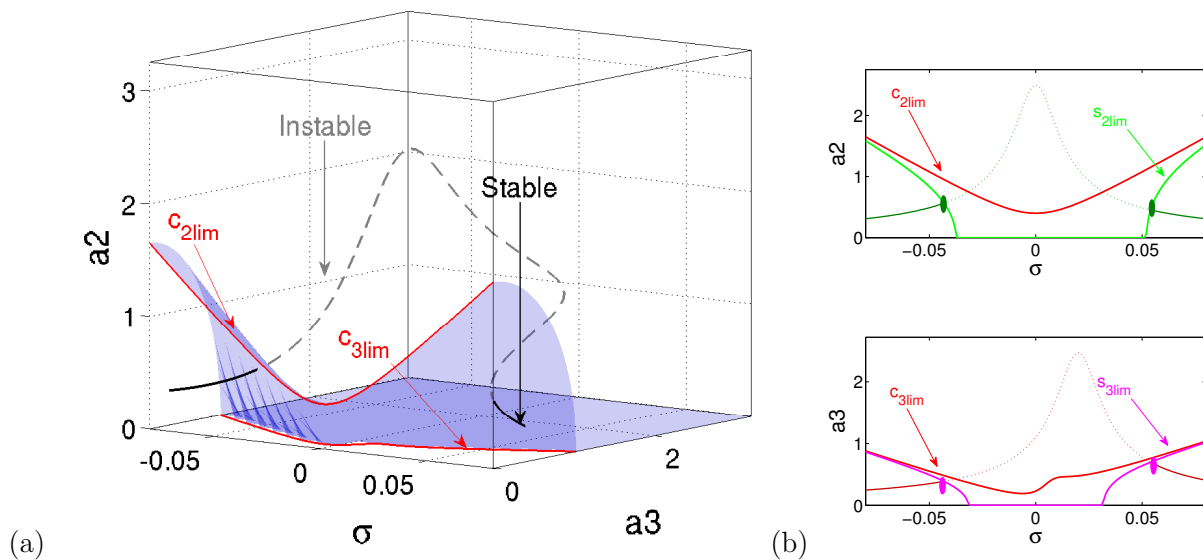


FIGURE 4 – Excitation HF :  $\Omega \approx \omega_2 \approx \omega_3$ . Limite de stabilité de la solution non couplée. Paramètres :  $\omega_1 = 1$ ;  $F_2 = F_3 = 0.1$ ;  $\sigma_1 = 0$ ;  $\sigma_2 = 0.02$ ;  $\mu_k = 0.01$ ;  $\alpha_i = 0.1$ . (a) Solution de base (5) et surface limite de stabilité  $S_{lim}$  dans  $(\sigma, a_2, a_3)$ . (b) Détermination des points limites de stabilité dans  $\{\sigma, a_2\}$  et  $\{\sigma, a_3\}$ .

La méthode des échelles multiples ne permettant pas d'extraire des expressions simples et manipulables pour les solutions couplées, celles-ci sont déterminées numériquement par continuation d'orbites périodiques via le logiciel Manlab [4, 6]. Nous vérifions alors la cohérence sur la zone de couplage entre la méthode analytique (fig. 5 (a)) est la méthode numérique (fig. 5 (b)). Les solutions couplées révèlent un comportement hystérétique de la solution. Des phénomènes de sauts permettent le passage des solutions linéaires aux solutions couplées, caractérisées par l'apparition de  $a_1$  (en bleu), de composante fréquentielle ( $\Omega/2$ ).

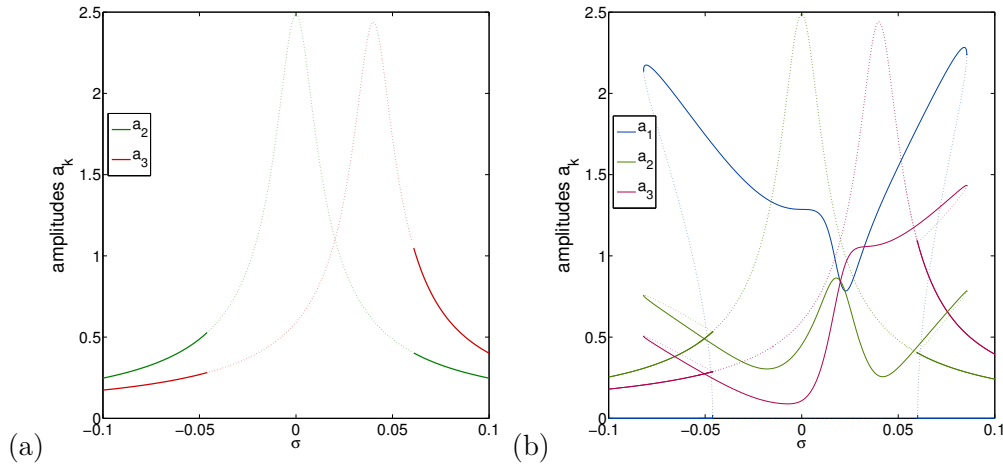


FIGURE 5 – Excitation HF :  $\Omega \approx \omega_2 \approx \omega_3$ . Paramètres :  $\omega_1 = 1$  ;  $F_2 = F_3 = 0.1$  ;  $\sigma_1 = 0.01$  ;  $\sigma_2 = 0.05$  ;  $\mu_k = 0.01$  ;  $\alpha_i = 0.1$ . (a) Stabilité analytique ; (b) Tracé des solutions par la méthode numérique.

### 3 Résultats expérimentaux - recalage du modèle

Expérimentalement, le steelpan est placé sous excitation forcée à l'aide d'un système électromagnétique constitué d'un aimant et d'une bobine circulaire parcourue par un courant. On applique ainsi une force ponctuelle sinusoïdale sur une note choisie. La fréquence d'excitation varie aux alentours des fréquences de résonance des modes propres. La mesure de vibration est effectuée ponctuellement à l'aide d'un vibromètre laser. Le modèle théorique est ajusté aux mesures en comparant le déplacement transverse  $w(\mathbf{x}_1, t) = \Phi_1(\mathbf{x}_1)q_1(t) + \Phi_2(\mathbf{x}_1)q_2(t) + \Phi_3(\mathbf{x}_1)q_3(t)$ , où  $\mathbf{x}_1$  représente le point de mesure. Dans le cas de l'excitation basse fréquence, ( $\Omega \approx \omega_1$ ), on peut séparer les composantes fréquentielles à  $\Omega$  et  $2\Omega$ . La figure 6 montre l'ajustement obtenu en considérant la composante à  $\Omega$ , permettant d'extraire l'amplitude du mode 1 via  $w_1 = \Phi_1 a_1$ .

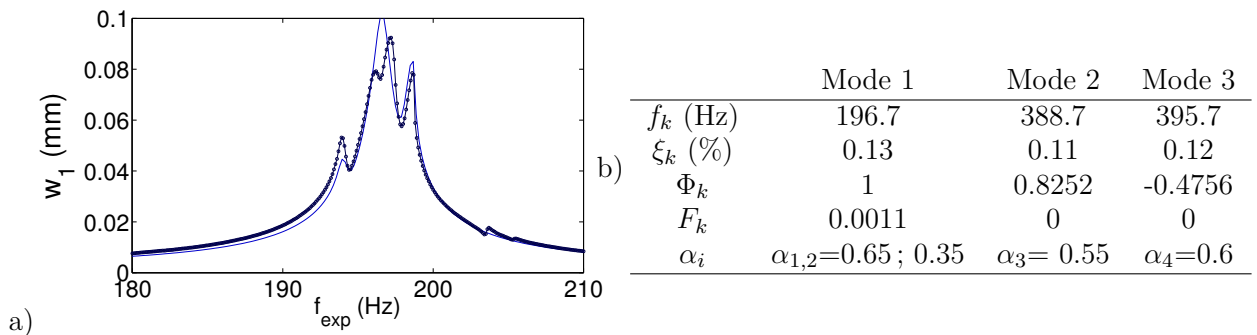


FIGURE 6 – Steelpan excité en basse fréquence :  $\Omega \approx \omega_1$  mesure en un point de la surface de la note excitée. (a) Superposition des courbes théorique (bleu) et expérimentale (noir) ; (b) Paramètres ajustés.

## 4 Conclusions et perspectives

L'étude du comportement vibratoire des steelpan permet d'aborder le cas plus général des coques de géométrie complexe. L'étude des couplages modaux donne en outre des informations sur la dynamique couplée utile dans d'autres domaines [3].

Notre étude porte principalement sur une résonance de type 1:2:2, non étudiée dans la littérature, apportant un nouvel éclairage au cas plus classique de la résonance 1:2. En effet, les résultats peuvent s'interpréter comme la perturbation du cas 1:2 par l'ajout d'un oscillateur en haute fréquence. Cette présence rend le système plus instable et peut entraîner une phénoménologie de solutions beaucoup plus complexe.

Les mesures expérimentales en oscillations forcées permettent d'une part de valider l'existence du phénomène dans le steelpan et d'autre part d'identifier les coefficients de couplage par ajustement des courbes d'amplitudes. Les recalages sont encore en cours pour parfaire l'identification du comportement lorsque l'excitation est proche des modes de haute de fréquence.

Des simulations temporelles d'un modèle de résonance 1:2, réalisé auparavant [7], montraient un très bon accord avec le comportement des sons de steelpan, lors du mode de jeu habituel (excitation impulsionnelle). Les prochains développements concernent donc la simulation des oscillations libres de la résonance 1:2:2, afin de quantifier l'impact du couplage sur le timbre des steelpan. Aussi, des modèles théoriques des différentes étapes de la facture (martelage, emboutissage, chauffage) sont mis à l'étude afin de déterminer les coefficients de couplage non linéaires à partir d'une modélisation et non plus d'une identification. Cette étude permettra en outre de quantifier les effets de tous ces processus de fabrication de coques minces sur les caractéristiques vibratoires linéaires et non linéaires.

## Références

- [1] A. Achong, The Steelpan as a system of non-linear mode localized oscillators, I : Theory, simulations, experiments and bifurcations, *Journal of Sound and Vibration*, **197(4)**, 471-487, 1996.
- [2] A. Achong, Mode locking on the non-linear notes of the steelpan. *Journal of Sound and Vibration*, **266(1)**, 193-197, 2003.
- [3] M.P. Cartmell, On the need for control of nonlinear oscillations in machine systems, *Meccanica*, **38**, 185-212, 2003.
- [4] B. Cochelin, C. Vergez, A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions, *Journal of Sound and Vibration*, **324**, 243-262, 2009.
- [5] A.G. Haddow, A.D.S. Barr, D.T. Mook, Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure, *Journal of Sound and Vibration*, **97(3)**, 451-473, 1984.
- [6] A. Lazarus, O. Thomas, A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems, *C.R. Mecanique*, **338**, 510-517, 2010.
- [7] M. Monteil, Vibrations non linéaires de steeldrums, caractérisation expérimentale et modèle phénoménologique, Rapport de stage de master II, Université Paris VI, 2010.
- [8] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear oscillations*, John Wiley & Sons, New-York, 1979.
- [9] T.D. Rossing, U.J. Hansen, D.S. Hampton, Vibrational mode shapes in Caribbean steelpan. I. Tenor and double second, *Journal of the Acoustical Society of America*, **108(2)**, 803-812, 2000.
- [10] O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne : Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance, *International Journal of Solids and Structures*, **42**, 3339-3373, 2005.