

## Vibrations chaotiques de plaques minces : application aux instruments de type cymbale

Cyril Touzé<sup>1</sup>, Stefan Bilbao<sup>2</sup>, Loris Longo-Mucciante<sup>1</sup>, Olivier Cadot<sup>1</sup>, Arezki Boudaoud<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Unité de Mécanique (UME), ENSTA-ParisTech, Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau Cedex, {cyril.touze,olivier.cadot}@ensta.fr

<sup>2</sup> School of Physics, University of Edinburgh, James Clerk Maxwell Building, Edinburgh, Scotland, S.Bilbao@ed.ac.uk

<sup>3</sup> Laboratoire RDP, UMR 5667, ENS-CNRS-INRA-Univ. Lyon I, 46 allée d'Italie, 69364 LYON cedex 07, arezki.boudaoud@ens-lyon.fr

Les instruments de type cymbale et gongs peuvent être représentés, en vue de la synthèse sonore par modèle physique, par des plaques et des coques minces. Le son typique qu'ils produisent, brillant, sans hauteur tonale précise et avec un très large contenu fréquentiel, s'explique par la non-linéarité géométrique que l'on ne peut plus négliger étant donné l'ordre de grandeur de l'amplitude des vibrations, qui peuvent atteindre jusqu'à dix fois l'épaisseur. Dans cette contribution, un modèle numérique pour la vibration non-linéaire géométrique des plaques minces à bords libres, combinant différences finies en espace et schéma conservant l'énergie en temps, est utilisé afin de reproduire les transitions et les vibrations chaotiques observées expérimentalement. Les échanges d'énergie entre modes résonnants, donnant lieu à un régime quasi-périodique, sont correctement simulés et analysés. Une fois le régime chaotique atteint, le formalisme de la turbulence d'ondes peut être utilisé afin de décrire les propriétés statistiques de la vibration. On montre que le schéma numérique reproduit exactement les prédictions théoriques du régime turbulent pour les spectres de puissance de la vitesse en un point.

### 1 Introduction

L'étude de la vibration des instruments de type cymbale et gong se fait dans le cadre des modèles de structures minces (plaques et coques) vibrant en grande amplitude. La non-linéarité géométrique produit tout un ensemble de phénomènes qu'une modélisation linéaire ne peut expliquer, dont le plus étonnant auditivement est le son riche et brillant de ces instruments lorsqu'ils sont excités par un coup de baguette ou de mailloche vigoureux. Le spectre large bande de ce régime est quant à lui typique d'une dynamique chaotique.

Afin de mener une étude expérimentale reproductible et plus facilement analysable, de nombreuses mesures ont été faites, sur divers instruments, où l'excitation en mode de jeu usuel (impulsionnelle) est remplacée par une excitation sinusoïdale d'amplitude croissante, afin de parfaitement contrôler la fréquence et l'amplitude du forçage, et mettre au jour la transition du régime linéaire au fortement non-linéaire. En augmentant progressivement l'amplitude du forçage pour une fréquence d'excitation donnée, les non-linéarités sont graduellement excitées et le schéma de transition peut être correctement analysé. Toutes les expériences, menées sur des cymbales, des gongs, mais aussi des plaques et des coques sphériques, ont montré un chemin générique pour la transition vers le chaos, impliquant deux bifurcations et trois régimes bien distincts [1, 2].

Le spectrogramme d'une expérience typique est montrée figure 1. Le signal analysé est la vitesse de vibration en un point, mesurée par vibrométrie laser, pour une cymbale de diamètre 51 cm et d'épaisseur 1 mm, pour une force d'amplitude croissante et de

fréquence  $f_{exc} = 467$  Hz.

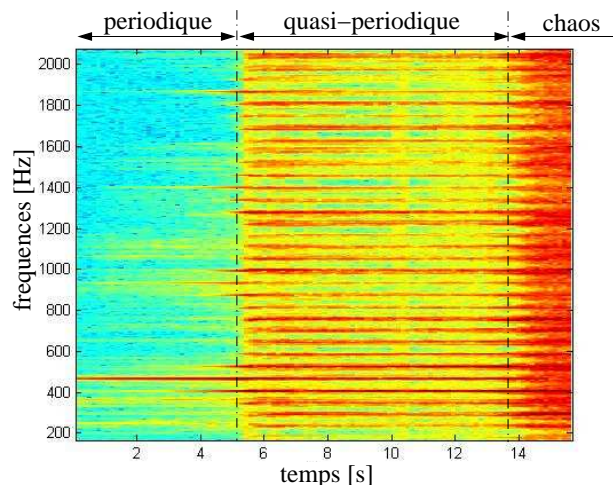


FIG. 1: Transition vers le chaos mesurée expérimentalement pour une cymbale de diamètre 51 cm et d'épaisseur 1 mm, mettant bien en évidence les trois régimes (périodiques, quasi-périodiques et chaotiques) observés génériquement.

Le premier régime est périodique, faiblement non-linéaire : il correspond à un mouvement unimodal de la cymbale qui est excitée à une de ses fréquences propres. A la première bifurcation, le spectre s'enrichit de nombreuses raies bien distinctes, le régime est alors quasi-périodique. Le régime unimodal a perdu sa stabilité en faveur d'un régime couplé impliquant plusieurs modes de vibrations. En effet, une analyse des composantes spectrales montre que toutes les fréquences qui appa-

raissent peuvent être regroupées deux à deux et vérifient à chaque fois des relations de résonance interne du type  $f_i + f_j = f_{exc}$ . L'énergie initialement concentrée sur le mode directement excité s'est ainsi répartie entre tous les modes présentant une relation de résonance interne avec icelui [1, 2]. Enfin après la seconde bifurcation, le régime chaotique s'établit avec son spectre large bande caractéristique. Perceptivement, le son produit par la cymbale lors de ce régime est très proche de celui obtenu en mode de jeu normal juste après l'impact.

Le but de cette étude est de reproduire numériquement ces expériences, afin de pouvoir étudier plus précisément le régime quasi-périodique et le régime chaotique, notamment en termes de modes excités et de dimension de l'espace des phases. A cette fin, un modèle numérique de plaque mince utilisant les hypothèses de von Kármán (*i.e.* incluant la non-linéarité géométrique) et combinant différences finies en espace et schéma conservant l'énergie en temps [3], a été adapté au cas d'un forçage harmonique ponctuel. Les résultats reproduisent parfaitement les observations, et le régime chaotique est alors étudié dans le cadre de la turbulence d'ondes, ce qui permet de voir cette expérience comme une transition vers la turbulence pour des vibrations dans un solide.

## 2 Modélisation

### 2.1 Équations de von Kármán

On considère une plaque rectangulaire de dimension  $L_x \times L_y$ , d'épaisseur  $h$ , de raideur en flexion  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  (le matériau, élastique homogène et isotrope étant représenté par  $E, \nu$  et  $\rho$ ). En prenant les hypothèses cinématiques de von Kármán (non-linéarité géométrique), les équations du mouvement s'écrivent [4, 5] :

$$D \Delta \Delta w + \rho h \ddot{w} = L(F, w) + f(x, y, t) \quad (1a)$$

$$\Delta \Delta F = -\frac{Eh}{2} L(w, w) \quad (1b)$$

où  $w(x, y, t)$  représente le déplacement transversal et la fonction d'Airy  $F$  regroupe les mouvements longitudinaux. La non-linéarité est cubique uniquement et s'exprime via l'opérateur bilinéaire  $L$  qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$L(F, w) = F_{,xx}w_{,yy} + F_{,yy}w_{,xx} - 2F_{,xy}w_{,xy} \quad (2)$$

Dans cette contribution l'amortissement est négligé, les équations sont conservatives. Un forçage ponctuel harmonique est considéré si bien que l'on écrira  $f(x, y, t) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)A \cos 2\pi f_{exc}t$ . Enfin on considère que les bords sont libres, cf. [5] pour les conditions aux limites correspondantes pour  $w$  et  $F$ .

Pour le traitement numérique les équations (1) sont mises à l'échelle en introduisant la longueur caractéristique  $L_0 = \sqrt{L_x L_y}$  et le déplacement caractéristique  $w_0 = h/\sqrt{6(1 - \nu^2)}$ . La fonction d'Airy est alors mise à l'échelle selon  $\bar{F} = F/D$ , si bien que le

système (1) se réduit à [3, 6] :

$$\ddot{\bar{w}} = -\kappa^2 \Delta \Delta \bar{w} + \kappa^2 L(\bar{F}, \bar{w}) + \frac{f(x, y, t)}{\rho h w_0} \quad (3a)$$

$$\Delta \Delta \bar{F} = -L(\bar{w}, \bar{w}) \quad (3b)$$

où seul le temps n'a pas été adimensionné, si bien que le seul paramètre restant,  $\kappa = \sqrt{D/(\rho h L_x^2 L_y^2)}$  est en  $s^{-1}$ .

### 2.2 Résolution numérique

Les champs continus  $w(x, y, t)$  et  $F(x, y, t)$  sont remplacés par leurs valeurs discrètes sur des grilles, notées respectivement  $w_{l,m}^n$  et  $F_{l,m}^n$ , où  $n$  est l'indice temporel ( $t_n = nh_t$  avec  $h_t$  le pas de temps), et  $(l, m) \in [0, N_x] \times [0, N_y]$  les indices spatiaux (pas d'espaces  $h_x$  et  $h_y$ ). Les équations (3) sont discrétisées selon le schéma suivant [3, 6] :

$$\delta_{tt} w = -\kappa^2 \delta_{\Delta\Delta} w + \kappa^2 l(\bar{F}, \bar{w}) + \frac{f_{l,m}^n}{\rho h w_0} \quad (4a)$$

$$\mu_{t-} \delta_{\Delta\Delta} F = -\gamma l(w, e_{t-} w) - (1 - \gamma) \mu_{t-} l(w, w) \quad (4b)$$

où l'on a défini les termes  $\bar{w} = \gamma w + (1 - \gamma) \mu_{t-} w$  et  $\bar{F} = \beta F + (1 - \beta) \mu_{t-} F$ . Dans ces équations,  $\delta_{tt}$  représente la dérivée discrète centrée d'ordre deux,  $\delta_{\Delta\Delta}$  l'opérateur discret du second ordre centré du bilaplacien,  $\mu_{t-}$  est un opérateur de moyennage en temps décentré vers l'arrière (de la même manière on définit les opérateurs de moyenne spatiale  $\mu_{x-}$  et  $\mu_{y-}$ ), et  $e_{t-}$  l'opérateur de décalage temporel vers l'arrière. Enfin l'opérateur bilinéaire  $L$  a été remplacé par  $l$  défini par :

$$l(f, g) = \delta_{xx} f \delta_{yy} g + \delta_{yy} f \delta_{xx} g - 2\mu_{x-} \mu_{y-} (\delta_{x+y+} f \delta_{x+y+} g) \quad (5)$$

où les dérivées  $\delta_{x+y+}$  sont croisées et décentrées vers l'avant en espace. La force externe  $f(x, y, t)$  est simplement remplacée par sa valeur au temps  $t_n$ , de telle sorte que  $f_{l,m}^n = \delta_{x_0, y_0} A \cos 2\pi f_{exc} t_n$ , avec  $\delta_{x_0, y_0}$  la distribution de Dirac au point  $(x_0, y_0)$  d'application de la force. Le schéma défini par les équations (4)-(5) est du second ordre en temps et en espace, implicite, et il conserve l'énergie [3]. Il dépend de deux paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  qui peuvent être réglés arbitrairement sous la double condition de stabilité donnée par :

$$\beta \leq 1/2 \quad (6)$$

$$h_t \leq \frac{h_x^2 h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (7)$$

Dans les simulations présentées, les valeurs ont été fixées à  $\gamma = 1$  et  $\beta = 0$ . En pratique, la valeur de l'échantillonnage temporel est donnée en paramètre d'entrée via la fréquence d'échantillonnage que l'on notera  $SR$  (comme sampling rate), et on en déduit le nombre de points de la grille discrète à l'aide de (7) en se plaçant le plus proche possible de la valeur maximale du pas de temps admissible, afin de contenir au maximum la dispersion numérique.

### 2.3 Schéma conservatif

Le principe des simulations numériques est de reproduire exactement les expériences rappelées en introduction. La force appliquée est donc sinusoidale

et ponctuelle, de fréquence  $\Omega$  fixée et d'amplitude  $F_{exc}$  linéairement croissante. Une plaque métallique est choisie, avec  $E=200$  GPa,  $\rho=7860$  kg.m<sup>-3</sup> et  $\nu=0.3$ ,  $L_x=0.3$ m,  $L_y=0.4$  m et  $h=1$  mm. La force est placée à un point de coordonnées  $(x_0, y_0)=(6, 16)$  cm.

La figure 2 montre un résultat typique et permet d'illustrer la nécessité d'employer un schéma temporel conservatif pour ce type de simulations. Dans ces deux simulations, la fréquence d'échantillonnage est de  $SR = 44100$  Hz pour une durée de simulation totale de 3 secondes. La fréquence du forçage est de 439 Hz, et l'amplitude est augmentée graduellement de 0 jusque 5 N en 1.8 s, elle est ensuite maintenue constante jusqu'à la fin (3 s). La première simulation a été menée avec un schéma temporel de Störmer-Verlet<sup>1</sup>, qui ne conserve pas l'énergie mécanique du système, mais est symplectique [7]. La seconde simulation avec le schéma conservant l'énergie [3]. Alors que dans le cas du schéma conservatif l'énergie vibratoire reste contenue dans la fréquence d'excitation et ses multiples impairs (conséquence de la non-linéarité cubique), on voit que le transfert d'énergie vers les hautes fréquences est beaucoup plus rapide pour le schéma de Störmer-Verlet, et que le régime se complexifie beaucoup plus rapidement. La conséquence immédiate est une instabilité du schéma, en effet dès que celui-ci a été utilisée pour des valeurs légèrement supérieures de l'amplitude du forçage (*i.e.* plus que 5 N), la solution numérique divergeait, alors que le schéma conservatif a toujours été stable quelque soit les amplitudes de forçage testées.

Ce test numérique montre la difficulté d'obtenir des simulations cohérentes pour reproduire les expériences, à cause des difficultés intrinsèques de la dynamique fortement non-linéaire que l'on souhaite simuler. Le problème est numériquement raide, l'amortissement est nul et les temps d'intégration sont très longs, ce qui rend le choix du schéma un problème majeur. Notre expérience a montré que seul un schéma conservant l'énergie permettait de mener à bien ce type de simulations.

### 3 Transition vers la turbulence

#### 3.1 Plaque étudiée

Les études numériques présentées dans cet article ont été menées avec une plaque rectangulaire de dimension  $0.3 \times 0.4 \times 0.001$  m, et une condition de bords libres. Les fréquences propres de cette plaque ont été calculées par la méthode des différences finies expliquée à la section précédente. Le choix du pas d'espace s'opérant à partir du choix de l'échantillonnage temporel, les fréquences propres calculées avec un fréquence d'échantillonnage de 44100 Hz (donnant lieu à une grille de  $25 \times 33$  points, soit 1.1 points par cm environ) sont données tableau 1.

#### 3.2 Excitation basse fréquence

Afin d'obtenir plus facilement le régime de vibration chaotique en bénéficiant de l'effet de résonance linéaire, les fréquences d'excitation ont été choisies systématiquement proche des fréquences propres de la

<sup>1</sup>Ce schéma temporel est aussi connu sous le nom de "leap-frog".

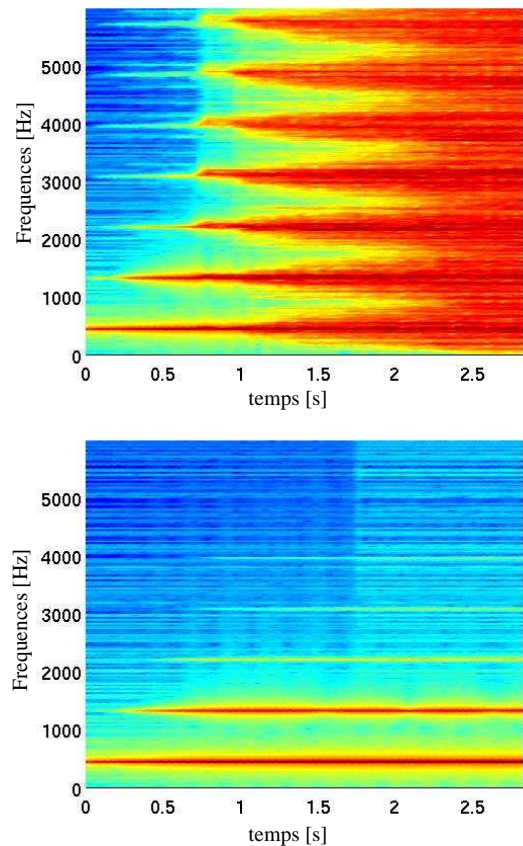


FIG. 2: Spectrogramme de la vitesse en un point de la plaque montrant la transition vers le chaos pour deux schémas d'intégration temporelle différentes. Haut : schéma de Störmer-Verlet, bas : schéma conservatif utilisé dans cette contribution. La plaque est excitée à 439 Hz, l'amplitude de la force est croissante de 0 à 5 N en 1.8 secondes, puis est maintenue constante.

24.93	30.61	55.86	59.13	72.29	88.93	113.5	119.5
151.9	169.6	170.9	183.8	194.7	219.2	268.4	280.1
286.1	299.0	307.2	313.2	359.3	379.7	379.8	419.1

TAB. 1: 24 premières fréquences propres (en Hz) de la plaque étudiée,  $0.3 \times 0.4 \times 0.001$  m.

plaque. Dans un premier temps nous avons étudié la réponse de la plaque à des excitations basse fréquence, pour les 8 premières fréquences de résonance. Dans ce cas-là, il a été observé une transition directe du régime périodique vers le régime chaotique.

La figure 3 montre le spectrogramme de la vitesse en un point de la plaque, pour  $f_{exc} = 59$  Hz. L'amplitude du forçage  $A$  est augmenté graduellement sur les 3 secondes de l'expérience numérique, de 0 à 40 N. On observe clairement, pendant la première seconde, un enrichissement spectral progressif avec de plus en plus d'énergie dans les harmoniques impaires de l'excitation. Puis au bout d'une seconde, *i.e.* pour une amplitude du forçage de 14 N, le régime périodique perd sa stabilité et le régime turbulent s'installe, caractérisé par le spectre large bande. La transition est ici directe, sans passer par un état quasi-périodique où des modes en combinaison de résonance apparaissent. Cela est dû au fait que ce type de couplage doit impliquer des modes de plus basse

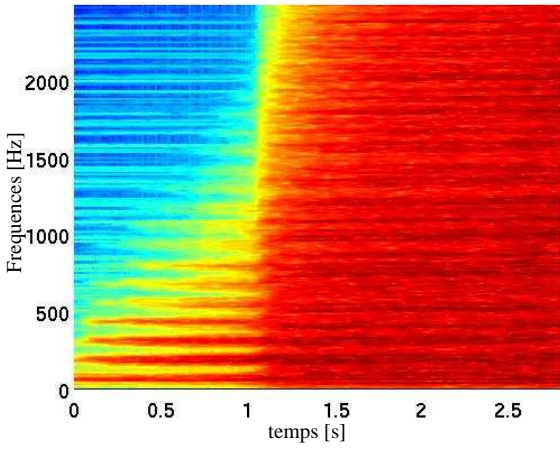


FIG. 3: Spectrogramme de la vitesse en un point de la plaque  $0.3 \times 0.4 \times 0.001$  m, excitée à 59 Hz, avec une force d'amplitude croissante, de 0 à 40 N sur les trois premières secondes. Une transition directe vers le régime turbulent est observée.

fréquence que la fréquence d'excitation [8], si bien que ceux-ci sont peu nombreux. De plus, la plaque étant parfaite, les résonances internes sont nécessairement d'ordre trois et donc plus difficiles à exciter. Le même type d'observations numériques a été fait sur des plaques circulaires avec une méthode de résolution modale [9].

### 3.3 Régime quasi-périodique

L'apparition du régime quasi-périodique a été observé numériquement en excitant la plaque à des fréquences beaucoup plus hautes, de sorte que le nombre de modes se situant sous la fréquence d'excitation soit important, rendant ainsi possible les couplages de modes par résonance interne. La figure 4 montre un premier exemple obtenu pour une fréquence d'excitation  $f_{exc}=645$  Hz, et une force croissant de 0 à 48 N pendant 3 secondes, puis étant maintenue constante jusqu'à la fin du calcul (5 secondes).

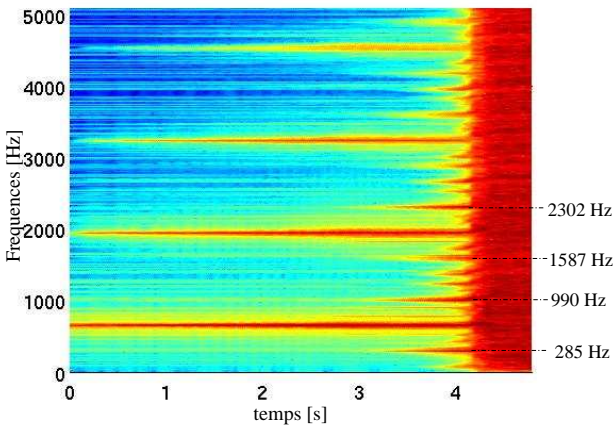


FIG. 4: Spectrogramme de la vitesse en un point de la plaque  $0.3 \times 0.4 \times 0.001$  m, excitée à 645 Hz, avec une force d'amplitude croissante, de 0 à 48 N sur les trois premières secondes, puis constante. Un régime quasi-périodique est observé avant le régime turbulent.

On observe clairement sur la figure 4 l'apparition de sous-harmoniques avant le régime chaotique. Plus précisément, le scénario des échanges d'énergie serait le suivant : la fréquence d'injection est à 645 Hz, la non-linéarité cubique crée alors les harmoniques  $3\Omega=1935$  Hz,  $6\Omega=3870$  Hz, etc... On peut remarquer que l'harmonique 3 a une amplitude très importante, la présence d'un mode propre à 1939 Hz montre que le régime est déjà couplé entre ces deux modes, et la solution est bimodale avec un couplage par résonance 1 :3. Ensuite de nombreux sous-harmoniques apparaissent dont les plus marqués sont :  $\omega_1 = 285$  Hz,  $\omega_2 = 990$  Hz,  $\omega_3 = 1587$  Hz et  $\omega_4 = 2302$  Hz. Ces fréquences vérifient :

$$\Omega + 3\Omega \simeq \omega_1 + \omega_4 \quad (8)$$

$$\Omega + 3\Omega \simeq \omega_2 + \omega_3 \quad (9)$$

On vérifie de plus la présence de modes propres à proximité de chacune de ces fréquences, si bien que l'on en déduit que l'énergie s'est échangée entre ces modes excités, via des relations de résonance interne d'ordre 3.

Un second exemple est montré figure 5, où l'énergie est injectée cette fois-ci à  $\Omega=871$  Hz, pour une force identique au cas précédent (de 0 à 48 N en 3 secondes). La simulation est stoppée juste avant l'apparition du régime chaotique, par contre le régime quasi-périodique est très clair avec l'apparition de quadruplets de fréquences entre chaque valeurs d'harmoniques impaires de l'excitation.

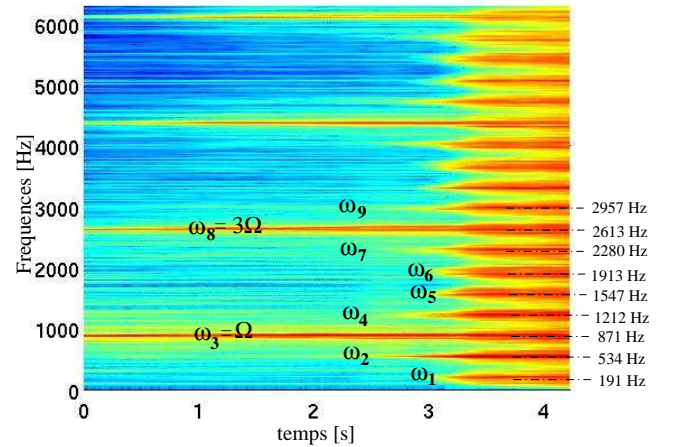


FIG. 5: Régime quasi-périodique pour la plaque excitée à 871 Hz.

Encore une fois dans ce cas-là un mode propre se trouve présent à proximité du troisième harmonique  $3\Omega=2613$  Hz, si bien qu'un régime couplé est présent dès le début de la simulation. Les fréquences apparaissant à partir de 3 secondes sont notées sur la figure, elles correspondent aussi à des valeurs de fréquences propres. On peut noter que les pulsations  $\omega_2$ ,  $\omega_4$ ,  $\omega_7$  et  $\omega_9$  apparaissent en premier dans le spectrogramme : ce sont celles qui vérifient le mieux les relations de résonances internes d'ordre trois avec le mode directement excité et celui se trouvant au troisième harmonique :

$$\Omega + 3\Omega \simeq \omega_2 + \omega_9 \quad (10)$$

$$\Omega + 3\Omega \simeq \omega_4 + \omega_7 \quad (11)$$

Ensuite l'énergie est encore échangé vers d'autres modes en résonance interne. On note les relations suivantes :

$$\Omega \simeq \omega_1 - \omega_7 + \omega_9 \quad (12)$$

$$\Omega \simeq \omega_5 + \omega_7 - \omega_9 \quad (13)$$

$$\Omega \simeq 2\omega_6 - \omega_9 \quad (14)$$

qui permettent d'expliquer l'apparition des pulsations  $\omega_1$ ,  $\omega_5$  et  $\omega_6$  dans le spectre et donc de donner une interprétation à la présence de chacun des pics dans la régime quasi-périodique.

En conclusion de cette partie, la méthode numérique, grâce en particulier à ses bonnes propriétés de conservation d'énergie qui permettent d'intégrer des dynamiques complexes et raides sur des temps longs sans divergence, retrouve les observations expérimentales, à savoir l'apparition d'un régime quasi-périodique lorsque des fréquences modales vérifient des relations de résonance interne. Ce régime est donc caractérisé par des échanges d'énergie entre ces modes. La dynamique se complexifie, sur les deux exemples numériques étudiés on a vu qu'il pouvait y avoir rapidement jusqu'à 10 modes présents dans la vibration, tout en conservant un spectre de raie. La seconde bifurcation fait apparaître un spectre large bande, typique d'une dynamique chaotique, que nous allons désormais étudier dans le formalisme de la turbulence d'ondes.

## 4 Régime turbulent

Une fois la seconde bifurcation passée, le régime de vibration se caractérise par un spectre large bande, signe qu'un flux d'énergie, dans le domaine de Fourier, existe et permet la création de structures à petite échelle. La figure 6 montre le déplacement  $w(x, y, t_0)$  de la plaque à  $t_0$  fixé lors de ce régime (excitation à 59 Hz, amplitude 40 N), mettant en évidence la coexistence de tout un spectre de longueurs d'ondes, des plus grandes aux plus petites. Le cadre de la turbulence d'ondes est alors adapté à l'analyse de ce régime que l'on peut qualifier de turbulent. La théorie de la turbulence d'ondes permet d'étudier les propriétés statistiques de système hors équilibre en situation de chaos spatio-temporel. Elle repose sur trois hypothèses fortes : dispersivité du milieu, faible non-linéarité (et donc persistance des ondes, pas d'intermittences comme on peut l'observer en turbulence hydrodynamique pleinement développée), et existence d'une fenêtre de transparence où l'on peut supposer la dynamique Hamiltonienne [10]. Ces hypothèses permettent de se défaire du problème de la fermeture des équations (hiérarchie des cumulants) et d'obtenir des résultats analytiques [11].

Le cas des plaques minces vibrant en grande amplitude selon le modèle de von Kármán a été étudié dans [12], donnant ainsi une formule analytique pour le spectre de puissance du déplacement en fonction du nombre d'onde  $k$ . Dans le domaine des fréquences, et utilisant le spectre de puissance de la vitesse instantanée  $v = \dot{w}$  plutôt que le déplacement (puisque c'est généralement la quantité mesurée lors d'expériences menées avec vibrométrie Laser)[13], la prédiction est alors celle d'un spectre indépendant de la fréquence :

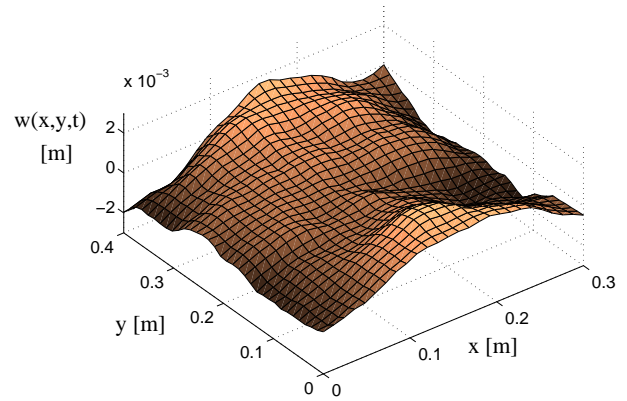


FIG. 6: Champ de déplacement  $w(x, y, t)$  pour la plaque  $0.3 \times 0.4 \times 0.001$  m, excitée à 59 Hz avec une amplitude de 40 N, *i.e.* lors du régime turbulent. On observe des déplacements de l'ordre de deux fois l'épaisseur, ainsi qu'une multitude de longueurs d'ondes présentes dans la déformation.

$P_v(f) = CP^{1/3}f^0$ , où  $C$  est une constante et  $P$  la puissance injectée.

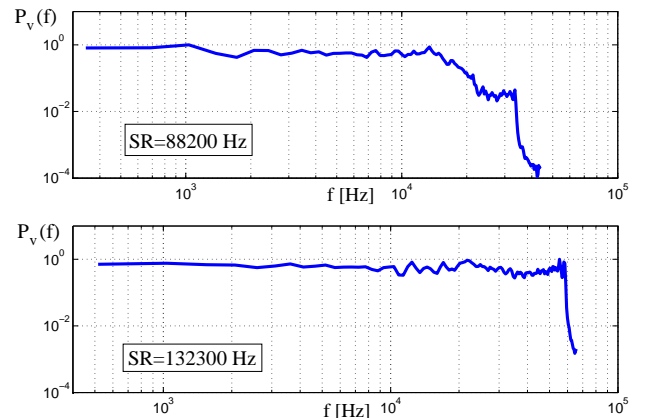


FIG. 7: Spectres de puissance de la vitesse  $v = \dot{w}$  en un point de la plaque, excitée respectivement à 122 Hz (haut) et 626 Hz (bas), avec une amplitude de 48 N, pour deux valeurs de la fréquence d'échantillonnage :  $SR=88200$  Hz (haut) et  $SR=132300$  Hz (bas). Dans les deux cas on observe une large gamme sur laquelle le spectre est indépendant de la fréquence, conformément à la prédiction théorique [12]. Une coupure apparaît en très haute fréquence, liée à la troncature numérique.

La figure 7 montre les spectres de puissance de la vitesse  $v = \dot{w}$ , en un point de la plaque, lorsque le régime turbulent est établi. Les paramètres de l'expérience pour ces figures sont les suivants : l'amplitude du forçage est la même (48N), et deux fréquences d'excitation différentes sont retenues, respectivement 122 Hz et 626 Hz. Le paramètre important que l'on change pour voir l'effet de la discrétisation sur la coupure est la fréquence d'échantillonnage  $SR$ , valant respectivement 88200 Hz pour la figure du haut (soit une grille spatiale de  $36 \times 48$  points), et de 132300 Hz pour la figure du bas ( $44 \times 58$  points). Dans les deux cas on observe clairement le régime de turbulence d'ondes qui s'étend quasiment

jusqu'à la fréquence de Nyquist et couvre une décade et demi dans le premier cas (la dépendance en  $f^0$  étant très nette jusque 14 kHz), et plus de deux décades dans le second (jusque 60 kHz). Ces simulations montrent la robustesse de l'algorithme et permet de valider la prédiction théorique [12].

## 5 Conclusion

La transition vers la turbulence pour les plaques minces forcées harmoniquement à forte amplitude, a été étudiée numériquement avec un code par différences finies en espace et conservatif en énergie. La condition de conservation de l'énergie pour le choix de l'intégrateur temporel s'est révélé cruciale afin de pouvoir obtenir des résultats numériques fiables, tous les autres intégrateurs temporels testés montrant des divergences à cause de la difficulté du problème (dynamique complexe et donc problème raide, temps d'intégration très longs, pas d'amortissement).

Au niveau des résultats le code a permis de retrouver les observations expérimentales quant au scénario de transition vers la turbulence. L'importance des résonances internes est de nouveau soulignée. Lorsque peu de relations de résonances internes existent (et donc en particulier pour les excitations basses fréquences), la transition est directe, du régime périodique vers le régime turbulent. Lorsque ces relations de résonance sont présentes, on observe d'abord un régime quasi-périodique caractérisé par un nombre petit de modes en interactions, ces modes étant justement ceux qui présentent les relations de résonance interne. Une fois le régime turbulent établi, le spectre de puissance de la vitesse instantanée calculée numériquement est conforme à une prédiction analytique formulée dans le cadre de la turbulence d'ondes.

Au niveau perceptif, les sons produits par le code numérique sont très réalistes et permettent d'envisager la synthèse sonore pour les instruments de type cymbale [6, 14]. Les développements ultérieurs vont se focaliser sur la prise en compte de l'amortissement et de défaut géométrique de la plaque.

## Remerciements

C.T. remercie chaleureusement Olivier Thomas et Antoine Chaigne pour notre passion commune sur le son des cymbales et des gongs.

## Références

- [1] C. Touzé, A. Chaigne, "Lyapunov exponents from experimental time series. Application to cymbal vibrations", *Acta Acustica* 86(3), 557-567 (2000).
- [2] A. Chaigne, C. Touzé, O. Thomas, "Nonlinear vibrations and chaos in gongs and cymbals", *Acoustical Science and Technology, Acoust. Soc. of Japan* 26(5), 403-409 (2005).
- [3] S. Bilbao, "A Family of Conservative Finite Difference Schemes for the Dynamical von Kármán

Plate Equations", *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 24(1), 193-216 (2007).

- [4] C. Touzé, O. Thomas, A. Chaigne, "Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part I : theory", *Journal of Sound and Vibration* 258(4), 649-676 (2002).
- [5] O. Thomas, S. Bilbao, "Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates : In-plane boundary conditions and some symmetry properties", *Journal of Sound and Vibration* 315(3), 569-590 (2008).
- [6] S. Bilbao, "Numerical Sound Synthesis : Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics", John Wiley and Sons (2009).
- [7] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, "Geometric numerical integration : structure-preserving algorithms for Ordinary differential equations", Springer, second edition (2006).
- [8] A. H. Nayfeh, "Nonlinear interactions : analytical, computational and experimental methods", Wiley series in nonlinear science (2000).
- [9] C. Touzé, O. Thomas, M. Amabili, "Transition to chaotic vibrations for harmonically forced perfect and imperfect circular plates", submitted to *International journal of non-linear Mechanics* (2010).
- [10] A.C. Newell, S. Nazarenko, L. Biven, "Wave turbulence and intermittency", *Physica D* 152-153, 520-550 (2001).
- [11] V. E. Zakharov, V. S. Lvov, G. Falkovich, "Kolmogorov Spectra of Turbulence I : Wave Turbulence", Springer Verlag, Berlin (1992).
- [12] G. Düring, C. Jossierand, S. Rica, "Weak Turbulence for a Vibrating Plate : Can One Hear a Kolmogorov Spectrum ?", *Physical Review Letters* 97, 025503 (2006).
- [13] A. Boudaoud, O. Cadot, B. Odille, C. Touzé, "Observation of Wave Turbulence in Vibrating Plates", *Physical Review Letters* 100, 234504 (2008).
- [14] S. Bilbao, "Percussion Sound Synthesis Using Models of Nonlinear Shell Vibration", *IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing*, accepté pour publication, 2009.