

# Effet des imperfections géométriques sur les vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces

Cédric Camier<sup>1</sup>, Cyril Touzé<sup>1</sup> & Olivier Thomas<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ENSTA/UME

Unité de recherche en Mécanique  
Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau cedex.  
cedric.camier@ensta.fr

<sup>2</sup>CNAM/LMSSc

Laboratoire de Mécanique des Structures et Systèmes couplés  
2, rue Conté, 75003 Paris.

## Résumé :

*Cet article propose un modèle de prédiction de vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces comportant de faibles imperfections géométriques. Les équations locales, dans lesquelles a été injecté le défaut de forme, sont discrétisées en utilisant la base des modes propres de plaque circulaire parfaite. Les développements analytiques nous fournissent les nouveaux coefficients linéaires, quadratiques et cubiques. Les résultats du modèle, appliqué au cas d'un défaut sphérique, sont comparés au modèle de coque sphérique précédemment développé par Thomas et al. (2005). Les effets dans le domaine linéaire de l'injection de défauts simples, axisymétriques et asymétriques, par cette méthode sont ensuite présentés puis confrontés à une simulation numérique par la méthode des éléments finis.*

## Abstract :

*This article is devoted to geometrically nonlinear vibrations of free edge circular plates with geometrical imperfections. The equations of motion are discretized by using the eigenmodes of the perfect plate. Analytical developments yields linear coupling terms as well as quadratic and cubic non-linear terms. Results are validated by comparison with the spherical shell model developed by Thomas et al (2005). Simple defects (purely axisymmetric or asymmetric) are then introduced and compared to numerical simulation with finite elements.*

## Mots-clefs :

**Plaque circulaire ; vibrations non-linéaires ; imperfection géométrique**

## 1 Introduction

Cette étude s'intéresse aux vibrations non-linéaires géométriques de plaques circulaires minces imparfaites à bord libre. Des études expérimentales (Thomas *et al.* (2006), Touzé (2005)), ainsi que des résultats théoriques (Amabili (2003), Gonçalves (1994)) ont montré l'importance des imperfections géométriques sur les caractéristiques vibratoires. Un défaut de forme de faible amplitude change drastiquement les valeurs de fréquences propres et provoque également la scission des deux fréquences issues de modes propres dégénérés (modes compagnons). Dans le domaine non-linéaire, il peut être à l'origine d'une modification qualitative des tendances de non-linéarité.

Un défaut géométrique, à état de contrainte initiale nulle, est ajouté aux équations de vibrations de plaque parfaite (analogie dynamique de von Kármán). Quelques cas simples sont ensuite choisis et comparés à des simulations numériques effectuées avec le code de calcul CAST3M<sup>®</sup>. Ces exemples soulèvent d'une part une discussion sur la convergence de la méthode employée et apportent d'autre part une contribution quant à l'influence d'un défaut asymétrique. Enfin, les confrontations avec des mesures sur des coques de laboratoire montrent un gain notable dans la prédiction des fréquences propres.

## 2 Formulation du problème

On considère dans la suite une plaque mince à bord libre de diamètre  $2a$ , d'épaisseur  $h$  réalisée dans un matériau homogène et isotrope de densité  $\rho$ , de coefficient de Poisson  $\nu$  et de module d'Young  $E$ . Le déplacement transverse local  $w(r, \theta, t)$  est décomposé selon :

$$w(r, \theta, t) = \tilde{w}(r, \theta, t) + w_0(r, \theta) \quad (1)$$

où  $w_0(r, \theta)$  représente le déplacement, de contrainte initiale nulle, que l'on suppose de faible amplitude, i.e. telle que :  $w_0(r, \theta)/a \ll 1, \forall r \in [0; a]$  et  $\forall \theta \in [0; 2\pi]$  et où  $\tilde{w}$  est le déplacement par rapport à cette position d'équilibre. Les équations locales de vibrations se déduisent alors du cas parfait (analogue dynamique de von Kármán, traité dans Touzé *et al.* (2002)) et s'écrivent :

$$\Delta\Delta\tilde{w} + \ddot{\tilde{w}} = \varepsilon[L(\tilde{w}, \tilde{F}) + L(w_0, \tilde{F}) - 2\mu\dot{\tilde{w}} + \tilde{p}], \quad (2a)$$

$$\Delta\Delta\tilde{F} = -\frac{1}{2}[L(\tilde{w}, \tilde{w}) + 2L(\tilde{w}, w_0)]. \quad (2b)$$

avec :

$$L(w, F) = w_{,rr} \left( \frac{F_{,r}}{r} + \frac{F_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + F_{,rr} \left( \frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} \right) - 2 \left( \frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2} \right) \left( \frac{F_{,r\theta}}{r} - \frac{F_{,\theta}}{r^2} \right), \quad (3)$$

où  $\varepsilon = 12(1 - \nu^2)$  est le paramètre issu de l'adimensionnement de  $w$  par  $h$ ,  $\mu$  le coefficient d'amortissement,  $\tilde{p}$  la pression locale normale appliquée à la plaque,  $\tilde{F}$  la fonction de force qui est fonction des efforts dans le plan de la plaque (efforts de membrane);  $\ddot{w}$ ,  $w_{,\alpha\beta}$  sont respectivement les dérivées secondes partielles de  $w$  par rapport au temps et aux coordonnées spatiales.

L'inertie longitudinale étant négligée, la fonction de force  $\tilde{F}$  dépend du déplacement transverse  $\tilde{w}$ . L'opérateur  $L(\cdot, \cdot)$  étant bilinéaire, le terme  $L(w_0, \tilde{F})$  de (2a) crée un terme linéaire et un terme quadratique en  $\tilde{w}$ . Ainsi, la première partie du terme  $L(w_0, \tilde{F})$  de (2a) traduit le *couplage linéaire* entre le mouvement transverse et l'étirement membranaire résultant de la géométrie non plane du défaut (dépendance en  $w_0$ ). La seconde partie du terme  $L(w_0, \tilde{F})$ , quant à lui, ainsi que le terme  $L(\tilde{w}, \tilde{F})$  rendent compte du *couplage non-linéaire* dû aux grandes élongations. Il comporte un terme quadratique issu à la fois de  $L(w_0, \tilde{F})$  et de  $L(\tilde{w}, \tilde{F})$  et un terme cubique issu uniquement de  $L(\tilde{w}, \tilde{F})$ , indépendant du défaut  $w_0$ . Ce dernier est donc naturellement égal à celui de la plaque plane circulaire sans défaut. Par contre, le terme quadratique était auparavant absent des équations non-linéaires de plaque (Touzé *et al.* (2002)).

## 3 Cas d'un défaut sphérique

Nous nous appliquons ici à retrouver le modèle de vibrations de coque sphérique mince de Thomas *et al.* (2005) à partir du modèle de plaque mince circulaire dans lequel on injecte un défaut sphérique peu profond. Dans un plan comprenant l'axe de symétrie de la plaque, on pose  $y_0$  l'ordonnée à l'origine du défaut  $w_0$ ,  $R$  son rayon de courbure, et  $r$  l'abscisse; un défaut sphérique peut alors s'écrire en grandeurs adimensionnées :

$$w_0(r) = \frac{a}{h} \left( \sqrt{(R/a)^2 - r^2} + y_0/a - (R/a) \right), \quad w_{0,r} \approx -\frac{a^2 r}{hR}, \quad w_{0,rr} \approx -\frac{a^2}{hR}. \quad (4)$$

Le développement limité au premier ordre des dérivées première et seconde de  $w_0$  par rapport à  $r$  traduit l'hypothèse de faible courbure introduit par Thomas *et al.* (2005). En injectant ce développement dans (2), nous obtenons exactement les équations dynamiques du modèle de coque sphérique et justifions ainsi l'approche que nous nous sommes proposés d'adopter.

#### 4 Solution par développement modal

Les équations locales (2) sont discrétisées en utilisant la base tronquée à  $N_p$  des modes propres  $(\Phi_i, \omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de la plaque parfaite. Parallèlement, nous projetons le défaut de forme sur cette même base. D'autre part, la fonction de force  $\tilde{F}$  s'avère être une combinaison linéaire de fonctions spatiales  $\Psi_s(r, \theta)$ , modes propres de la plaque à bord encasté (cf Thomas *et al.* (2005)). Ainsi en posant :

$$\tilde{w}(r, \theta, t) = \sum_{p=1}^{N_p} \tilde{q}_p(t) \Phi_p(r, \theta) \quad \text{et} \quad w_0(r, \theta) = \sum_{p=1}^{N_p} a_p \Phi_p(r, \theta), \quad (5)$$

nous obtenons :

$$\ddot{\tilde{q}}_u + \omega_u^2 \tilde{q}_u = -\varepsilon \left[ \sum_{p=1}^{N_p} \alpha_p^u \tilde{q}_p + \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{r=1}^{N_p} \beta_{pr}^u \tilde{q}_p \tilde{q}_r + \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{r=1}^{N_p} \sum_{s=1}^{N_p} \Gamma_{rsp}^u \tilde{q}_p \tilde{q}_r \tilde{q}_s - 2\mu_u \dot{\tilde{q}}_u + \tilde{p}_u \right] \quad (6)$$

avec :

$$\Gamma_{rsp}^u = -\frac{1}{2\xi_q^4} \frac{\sum_{q=1}^{N_p} \iint_S \Phi_u L(\Phi_p, \Psi_q) \iint_S \Psi_q L(\Phi_r, \Phi_s) dS}{\iint_S \Phi_u^2 dS \iint_S \Psi_q^2 dS},$$

où  $\tilde{p}_u$  est la projection de la pression  $\tilde{p}$  et  $\mu_u$  un amortissement modal. Dans ces équations apparaissent des coefficients linéaires  $\alpha_p^u$  et quadratiques  $\beta_{pr}^u$  qui proviennent du défaut géométrique introduit. Ils s'expriment analytiquement :

$$\alpha_p^u = \sum_{r=1}^{N_p} \sum_{s=1}^{N_p} 2\Gamma_{rps}^u a_r a_s, \quad \beta_{pr}^u = \sum_{s=1}^{N_p} (\Gamma_{rps}^u + 2\Gamma_{srp}^u) a_s. \quad (7)$$

Le problème (6) est ensuite diagonalisé numériquement. Soit la matrice  $\mathbf{A} = \{\varepsilon \alpha_p^u + \omega_u^2 \delta_{up}\}_{u,p \in [1; N_p]}$  la partie linéaire de (6). La diagonalisation de  $\mathbf{A}$  permet de calculer les fréquences propres  $\Omega_p$  et les déformées modales de la plaque avec défaut, ainsi que les nouveaux termes non-linéaires quadratiques  $g_{pq}^u$  et cubiques  $h_{pqr}^u$ . Ces derniers sont obtenus en utilisant la matrice de passage composé des vecteurs propres associés à la diagonalisation de  $\mathbf{A}$ .

## 5 Applications

### 5.1 Défaut sphérique

Afin de valider notre méthode, nous regardons l'effet de l'injection d'un défaut sphérique paramétré par  $\chi = 12(1 - \nu^2)a^4/(h^2 R^2)$  que nous comparons au modèle de Thomas *et al.* (2005). Les résultats sur les fréquences propres (fig.1) et sur les déformées modales (fig.2) montrent un excellent accord tant sur les modes axisymétriques qu'asymétriques.

Sont comparés également quelques coefficients cubiques issus d'une part du modèle de coque et d'autre part de l'injection du défaut (fig.3). Il apparaît que la convergence du calcul

des coefficients cubiques selon la troncature  $N_p$  est parfois difficile. Les divergences les plus fortes sont constatées sur les termes faisant intervenir les plus grands projetés issus de la décomposition modale du défaut. Les coefficients quadratiques montrent de la même manière une bonne adéquation, entachée cependant d'erreurs dues à la convergence.

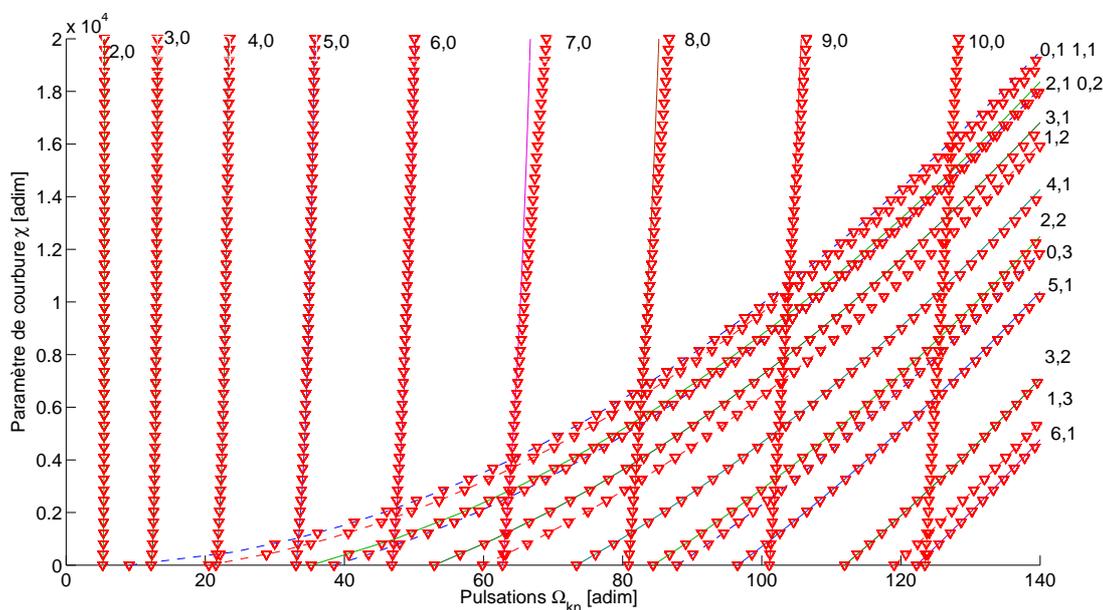


FIG. 1 – Pulsations naturelles adimensionnées  $\Omega_{kn}$  d'une coque en fonction du paramètre de courbure  $\chi$  d'après les données de l'article de Thomas *et al.* (2005) (—) et d'après les résultats du calcul de l'introduction d'un défaut sphérique dans les équations de plaque ( $\nabla$ ). ( $k, n$ ) se rapportent respectivement au nombre de diamètres et de cercles nodaux.

## 5.2 Effets d'un défaut axisymétrique ou asymétrique

Une application est menée sur les cas simples d'un défaut porté sur un seul mode axisymétrique  $(0, 1)$  et ou sur un seul mode asymétrique  $(2, 0)$  (fig.4). L'évolution des fréquences propres est tracée en fonction de l'amplitude  $a_p$  du défaut projeté sur le mode  $\Phi_p$  normalisé selon  $\iint_S \Phi_p^2 dS$ . Cette étude permet notamment d'évaluer l'importance du défaut asymétrique que peuvent comporter les coques réelles. En effet, en portant le défaut sur un seul des modes compagnons du mode  $(2, 0)$ , la fréquence propre de ce dernier varie considérablement tandis que celle de son homologue reste quasiment inchangée. On note également que les modes dont le nombre de diamètres nodaux est multiple de  $k = 2$  varient plus fortement que les autres. Plus

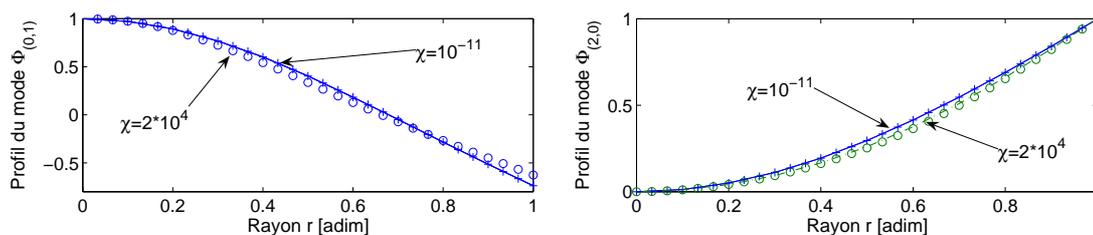


FIG. 2 – Profils des modes  $(0, 1)$  et  $(2, 0)$  établis grâce au modèle présenté, pour  $\chi = 10^{-11}$  (+) et  $\chi = 2 * 10^4$  (o), et comparés à ceux calculés par Thomas *et al.* (2005), pour  $\chi = 10^{-11}$  (—) et  $\chi = 2 * 10^4$  (-.-).

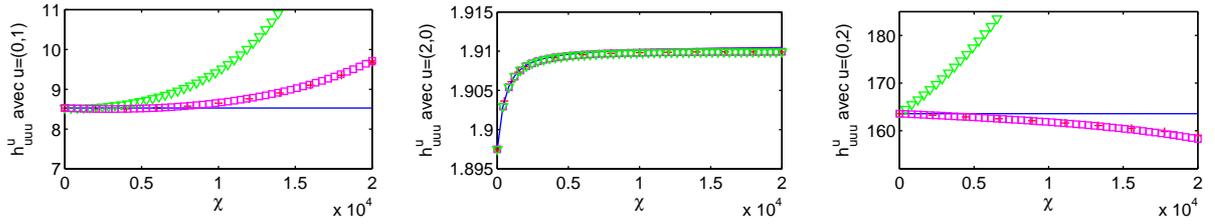


FIG. 3 – Coefficients cubiques  $h_{uuu}^u$  des modes  $(0, 1)$ ,  $(2, 0)$  et  $(0, 2)$  en fonction de  $\chi$  selon le modèle de coque de Thomas *et al.* (2005) (—), selon le modèle présenté ici avec  $N_p=4$  ( $\nabla$ ),  $N_p=7$  ( $\square$ ) et  $N_p = 13$  ( $+$ ).

généralement, il apparaît que les modes les plus touchés sont ceux de la famille à laquelle appartient le mode sur lequel on a projeté le défaut. Des simulations numériques avec CAST3M<sup>®</sup> ont également été effectuées afin d'évaluer la pertinence de nos résultats (fig.4). Les résultats des deux méthodes montrent une très bonne correspondance. On relève néanmoins certains désaccords pour le cas du défaut asymétrique. Notre doute porte sur les résultats fournis par le code de calcul par éléments finis. En effet, alors que la symétrie est brisée, les fréquences des modes compagnons  $(3, 0)$ , par exemple, ne se scindent pas d'après le calcul effectué par CAST3M<sup>®</sup>.

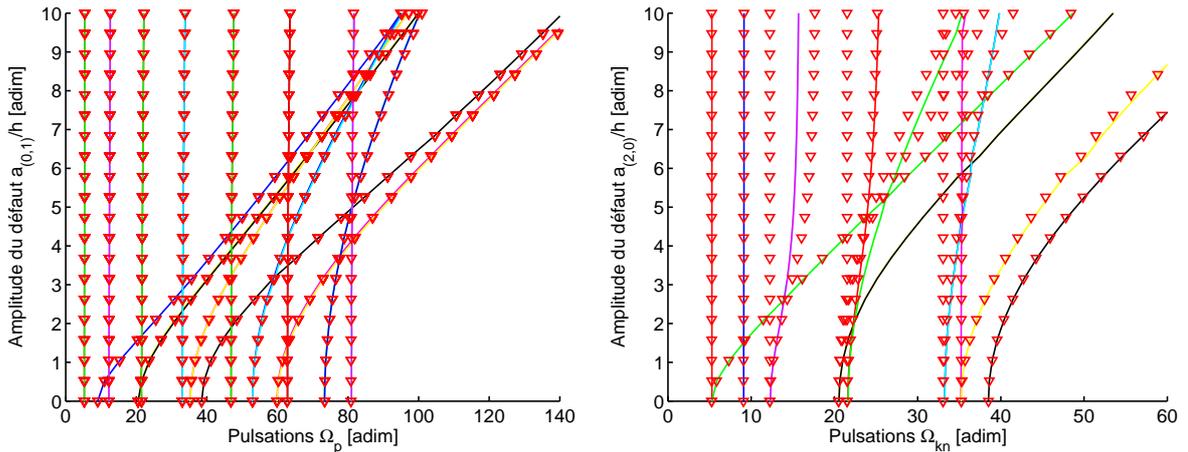


FIG. 4 – Évolutions des pulsations propres des premiers modes dans le cas d'un défaut porté sur  $(0, 1)$  et  $(2, 0)$  selon CAST3M<sup>®</sup> (—) et d'après notre modèle ( $\nabla$ ). L'amplitude  $a_p$  du défaut est adimensionnée par l'épaisseur  $h$ .

### 5.3 Application à des coques réelles

Le défaut axisymétrique (mesuré selon une directrice) des coques de laboratoire utilisées dans Thomas *et al.* (2006) a été pris en compte dans le modèle. Un ajustement des fréquences a été fait sur le module d'Young, de manière à ce que les fréquences expérimentales et théoriques des modes axisymétriques soient en moyenne les plus proches possible. Les résultats de l'application du défaut montrent une meilleure prédiction de toutes les fréquences propres, y compris sur les modes axisymétriques (tab.1). L'écart reste cependant important lorsque le nombre de diamètres ou de cercles nodaux est élevé. Cela étant, le défaut réel de la coque est mal représenté par une simple mesure de profil. Une campagne de mesures de la géométrie complète des coques de laboratoire est prévue très prochainement et sera présentée au congrès.

Mode	(2, 0)	(3, 0)	(4, 0)	(5, 0)	(6, 0)	(7, 0)	(8, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)
$F_{exp}$ (Hz)	13.75	34	57.25	83	110	141	172.25	225	354	444.25	555.5
	17.5	35.5	58.25	83.75	111	141.5	176	214			
$F_{th1}$ (Hz)	11.02	26.37	46.90	72.17	101.77	135.45	173.01	386.03	393.11	423.17	495.65
$F_{th2}$ (Hz)	11.54	30.2	56.9	86.5	118.7	152.4	186.5	211.8	220.6	254.5	451.3

TAB. 1 – Valeurs expérimentales et théoriques des fréquences propres d’une coque de laboratoire.  $F_{exp}$  sont les fréquences mesurées expérimentalement ; les fréquences propres des modes compagnons sont différentes à cause du défaut asymétrique de la coque.  $F_{th1}$  sont les fréquences théoriques données par le modèle de coque sphérique parfaite de Thomas *et al.* (2006) et  $F_{th2}$  les fréquences théoriques issues de l’injection du défaut axisymétrique.

## 6 Conclusions

A notre connaissance, les études précédentes sur l’introduction d’un défaut géométrique étaient soit limitées au cas d’un défaut axisymétrique (Gonçalves (1994)), soit ne montraient l’effet du défaut que sur l’évolution de quelques fréquences propres (Amabili (2003)). Aucun article ne propose une étude systématique de l’effet du défaut sur les caractéristiques linéaires et non-linéaires, ainsi qu’une validation de la méthode avec des résultats démontrés par ailleurs, ce que tente de faire cette étude. Les différentes confrontations menées ici, entre théories, simulations et mesures soulignent les importants problèmes de convergence rencontrés mais valident bon nombre de résultats qui nous confortent dans la méthode adoptée. Par ailleurs, cette étude systématique fournit les coefficients non-linéaires des équations dynamiques des structures imparfaites et ouvre ainsi le champ d’étude à beaucoup d’applications, notamment la prédiction plus précise des tendances de non-linéarité et des couplages intermodaux (Touzé et Thomas (2006)) dans le cas de coques minces réelles.

## Références

- M. Amabili (2003) A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells : Lagrangian approach. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 264, pp. 1091-1125.
- M. Amabili (2003) Theory and experiments for large-amplitude vibrations of empty and fluid-filled circular cylindrical shells with imperfections. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 262, pp. 921-975.
- CAST3M<sup>®</sup> (2004) Cast3m : Documentation.
- P. B. Gonçalves (1994) Axisymmetric vibrations of imperfect shallow spherical caps under pressure loading. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 174, Issue 2, pp. 249-260.
- O.Thomas (2003) Vibrations non-linéaires de calottes sphérique minces. Expériences et modélisation. Rapport de stage de post-doctorat.
- O.Thomas, C. Touzé et A. Chaigne (2005) Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1 : 1 : 2 internal resonance. *International Journal of Solids and Structures*. vol. 42, No. 11-12, pp. 3339-3373.
- O.Thomas, C. Touzé et E. Luminais (2006) Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : experiments on a 1 : 1 : 2 internal resonance. *Nonlinear Dynamics*. Sous presse.
- C.Touzé et O.Thomas (2005) Type of non-linearity of shallow spherical shells using non-linear normal modes. *EUROMECH Non-linear Oscillations Conference 2005*.
- C. Touzé et O.Thomas (2006) Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells : Effect of the geometry. *International Journal of non-linear Mechanics*. Vol. 41, No. 5, pp. 678-692.
- C. Touzé, O.Thomas et A. Chaigne (2002) Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part I : theory. *Journal of Sound and Vibration*. Vol 258, No 4, pp. 649-676.