

# Vibrations non-linéaires de cymbales et de gongs

Cyril Touzé

ENSTA-UME,  
*Unité de recherche en Mécanique,*  
Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées  
cyril.touze@ensta.fr



## 1 CYMBALES ET GONGS

- Présentation des instruments
- Régime libre
- Régime forcé

## 2 NON-LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE

- Définition
- Exemples de modèles
- Projection modale

## 3 TENDANCE DE NON-LINÉARITÉ

- Oscillateur de Duffing
- comportement raidissant/assouplissant

## 4 COUPLAGES MODAUX

- Résonances internes
- cas de la résonance 1:2

## 5 VIBRATIONS CHAOTIQUES

- Chaos temporel et turbulence
- Transition vers le chaos

- 1 CYMBALES ET GONGS**
  - Présentation des instruments
  - Régime libre
  - Régime forcé
- 2 NON-LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE**
  - Définition
  - Exemples de modèles
  - Projection modale
- 3 TENDANCE DE NON-LINÉARITÉ**
  - Oscillateur de Duffing
  - comportement raidissant/assouplissant
- 4 COUPLAGES MODAUX**
  - Résonances internes
  - cas de la résonance 1:2
- 5 VIBRATIONS CHAOTIQUES**
  - Chaos temporel et turbulence
  - Transition vers le chaos

- Famille des instruments de percussion :  
*métallophones, idiophones*

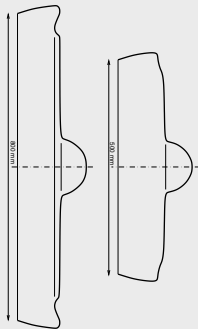
Le son de l'instrument est produit par la matière même, sans qu'on ait recours à des éléments internes (tension de membrane, de corde) ou externe (excitateur, résonateur).  
↪ instrument de musique très "simple".

- Famille des instruments de percussion :  
*métallophones, idiophones*

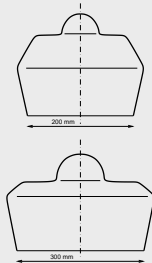
Le son de l'instrument est produit par la matière même, sans qu'on ait recours à des éléments internes (tension de membrane, de corde) ou externe (excitateur, résonateur).  
↪ instrument de musique très "simple".

- Instrument de percussion *non-linéaire* :  
richesse spectrale du son produit (spectre large bande).  
↪ le comportement vibratoire ne peut être expliqué avec un modèle linéaire.

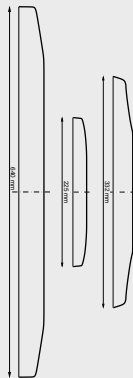
- Origine géographique : Asie (Chine, Indonésie).  
Rôle important aussi dans les orchestres classiques occidentaux.
- Profils typiques de Gongs:



(a) - Gongs verticaux  
(Viet Nam, *kempuls* du gamelan javanais)



(b) - Gongs horizontaux  
(*Bonangs, kenongs* du gamelan javanais)



(c) - Tam-tam,  
gongs d'opéra chinois

↪ distinction de **2 familles**, selon l'épaisseur et la **raideur**.

## Cymbales et Gongs

### Présentation des instruments

Régime libre

Régime forcé

### Non-linéarité géométrique

### Tendance de non-linéarité

### Couplages modaux

### Vibrations chaotiques

### Conclusion générale

- Epaisseur de l'ordre de 1 mm.
- diamètre très importants, de 60 cm jusque plus de 1.2 m.



Cymbales et  
Gongs

Présentation des  
instruments

Régime libre

Régime forcé

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale

- Epaisseur de l'ordre de 1 mm.
- diamètre très importants, de 60 cm jusque plus de 1.2 m.



- Son très riche, prolongé (très peu d'amortissement).



## GONGS "ÉPAIS"

- Epaisseur de l'ordre de 2 mm.
- diamètre moins importants.
- Présence d'un dôme au centre et d'une collerette autour.  
↳ rigidifie la structure.



- Utilisés dans le *gamelan* javanais.



Cymbales et  
Gongs

Présentation des  
instruments

Régime libre

Régime forcé

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale

- Utilisés dans le *gamelan* javanais.



- Utilisés dans le *gamelan* javanais.

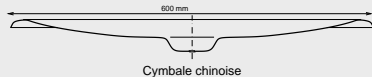
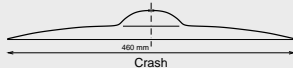
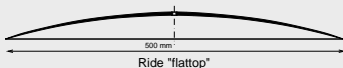
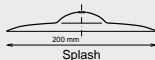


- Utilisés dans le *gamelan* javanais.



- Essentiellement utilisées dans les musiques occidentales "populaires" (Jazz, musique pop, variétés...)
- Différences principales avec les gongs : taille, trou au centre pour fixation, pas de collerette (bord plat).

- Essentiellement utilisées dans les musiques occidentales "populaires" (Jazz, musique pop, variétés...)
- Différences principales avec les gongs : taille, trou au centre pour fixation, pas de collerette (bord plat).
- Profils typiques de cymbales:



## Cymbales et Gongs

### Présentation des instruments

Régime libre

Régime forcé

### Non-linéarité géométrique

### Tendance de non-linéarité

### Couplages modaux

### Vibrations chaotiques

### Conclusion générale

- Dénomination onomatopéique : splash, crash, ride.  
dans les orchestres : française, viennoise, allemande.



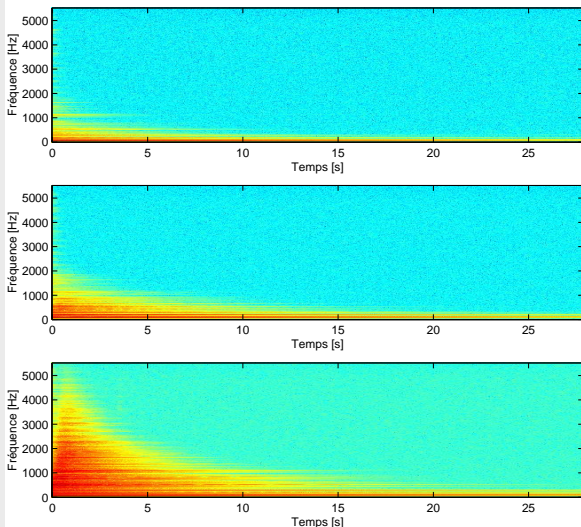


- Son caractérisé par un **spectre large bande**.
  - pas de hauteur tonale distincte.
  - multitude de fréquences, son caractéristique riche et brillant.
- ↪ typique d'un comportement fortement non-linéaire.

- Son caractérisé par un **spectre large bande**.
  - pas de hauteur tonale distincte.
  - multitude de fréquences, son caractéristique riche et brillant.
  - ↔ typique d'un comportement fortement non-linéaire.
- D'où provient la non-linéarité ?
  - ↔ grandes amplitudes de vibrations,
  - dès lors que l'amplitude du déplacement transverse  $w(x, t)$  est de l'ordre de l'épaisseur  $h$ .

↪ **non-linéarité géométrique**

- Analyse temps-fréquence (sonagrammes)  
pour 3 frappes d'intensité croissante sur le même gong :



Cymbales et  
Gongs

Présentation des  
instruments

Régime libre  
Régime forcé

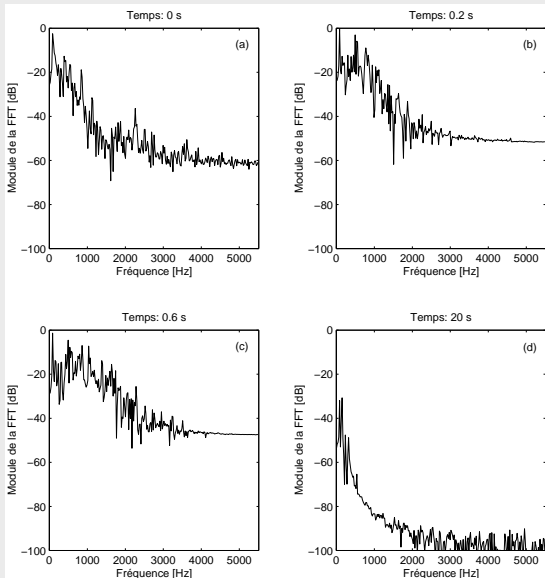
Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

Vibrations  
chaotiques

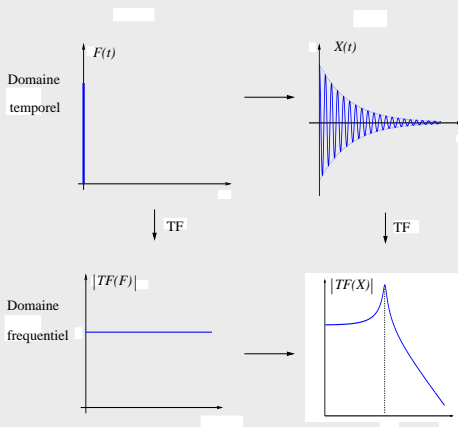
Conclusion  
générale



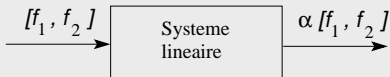
■ Pour un oscillateur linéaire

$$\ddot{X} + \omega_f^2 X + 2\mu\dot{X} = F(t)$$

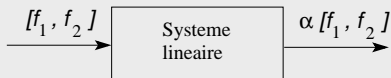
réponse à une excitation impulsionnelle:



## ■ Système linéaire:



- **Système linéaire:**



- **L'enrichissement spectral est la manifestation de la non-linéarité.**

## VIBRATIONS FORCÉES

- Idée : faire une expérience mieux contrôlée afin de mettre au jour la dynamique et expliquer l'enrichissement spectral.
- Moyen : Exciter la cymbale (le gong) par une force sinusoidale, monofréquentielle.

2 paramètres de contrôle:

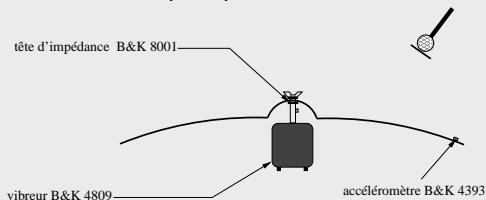
- la fréquence de forçage.
- l'amplitude du forçage.



- Idée : faire une expérience mieux contrôlée afin de mettre au jour la dynamique et expliquer l'enrichissement spectral.
- Moyen : Exciter la cymbale (le gong) par une force sinusoïdale, monofréquentielle.

2 paramètres de contrôle:  
– la fréquence de forçage.  
– l'amplitude du forçage.

■ Réalisations pratiques:

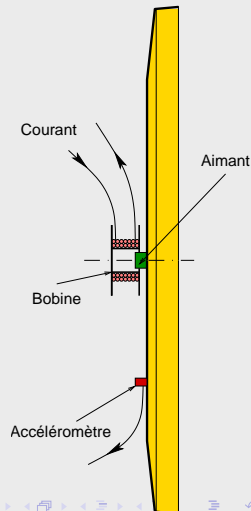
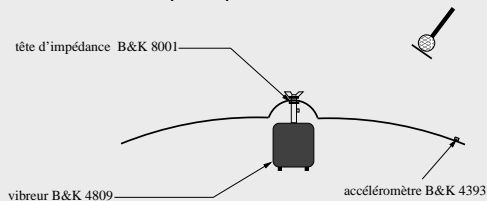


## VIBRATIONS FORCÉES

- Idée : faire une expérience mieux contrôlée afin de mettre au jour la dynamique et expliquer l'enrichissement spectral.
- Moyen : Exciter la cymbale (le gong) par une force sinusoidale, monofréquentielle.

2 paramètres de contrôle:  
– la fréquence de forçage.  
– l'amplitude du forçage.

■ Réalisations pratiques:



Cymbales et  
Gongs

Présentation des  
instruments

Régime libre

Régime forcé

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale



Cymbales et  
Gongs

Présentation des  
instruments

Régime libre

**Régime forcé**

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale



# VIBRATIONS FORCÉES

## RÉALISATIONS EXPÉRIMENTALES



## VIBRATIONS FORCÉES

- Splash cymbal (Zyldjian)  
diamètre : 30 cm  
épaisseur : .7 mm  
freq. excitation: 283 Hz.



- Ride cymbal (K)  
diamètre : 51 cm  
épaisseur : 1.1 mm  
freq. excitation: 438 Hz



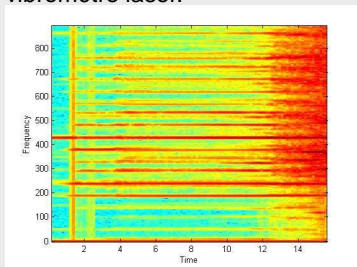
- Turkish ride cymbal  
diamètre : 56 cm  
épaisseur : 1.3 mm  
freq. excitation: 608 Hz



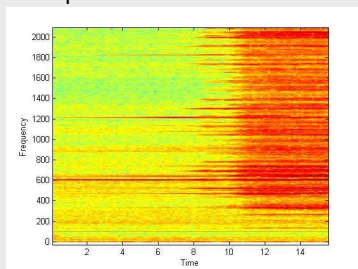
## VIBRATIONS FORCÉES

### Analyse de deux des signaux précédents:

► K-ride, excitation 438 Hz,  
mesure de la vibration par  
vibromètre laser.

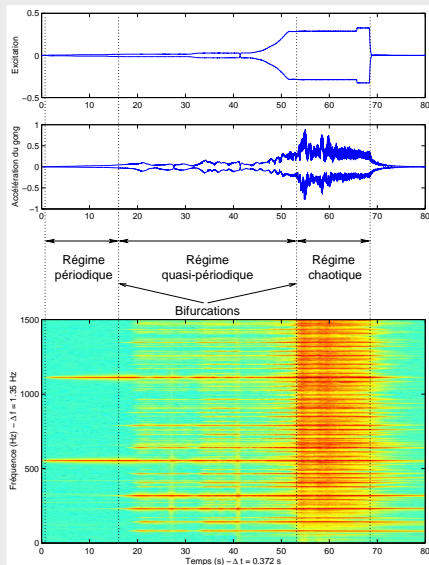


► ride Turkish, 608 Hz  
pression mesurée par un  
microphone.



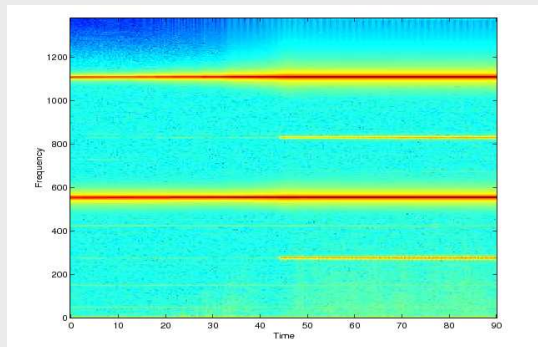
# VIBRATIONS FORCÉES

CAS D'UN GONG, FRÉQUENCE D'EXCITATION 556 Hz



# VIBRATIONS FORCÉES

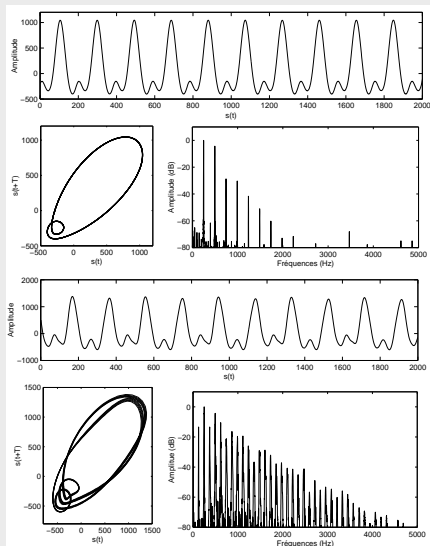
CAS D'UN GONG, FRÉQUENCE D'EXCITATION 568 Hz





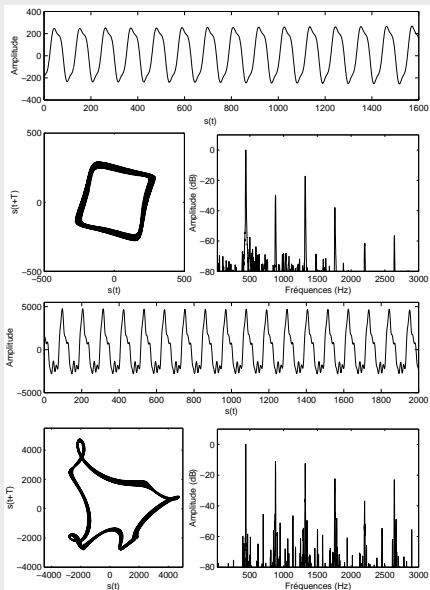
# VIBRATIONS FORCÉES

## CAS D'UNE CYMBALE, FRÉQUENCE D'EXCITATION 248 Hz, PREMIÈRE TRANSITION



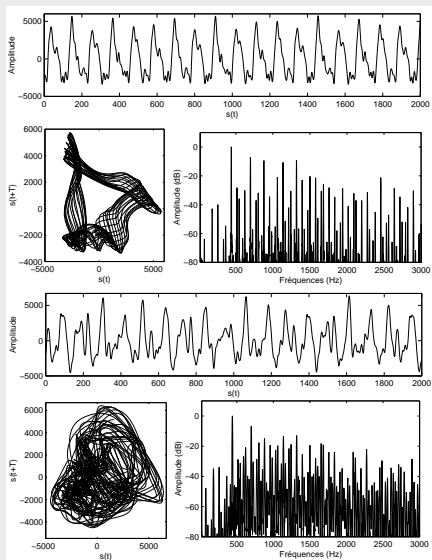
# VIBRATIONS FORCÉES

## CAS D'UNE CYMBALE, FRÉQUENCE D'EXCITATION 440 HZ, PREMIÈRE TRANSITION



# VIBRATIONS FORCÉES

## CAS D'UNE CYMBALE, FRÉQUENCE D'EXCITATION 440 Hz, DEUXIÈME TRANSITION



- Observations génériques :
  - 2 bifurcations
  - 3 régimes distincts

## VIBRATIONS FORCÉES

- Observations génériques :
  - 2 bifurcations
  - 3 régimes distincts
- Régime **périodique** (quasi-linéaire).  
Un seul mode de vibration excité.

- Observations génériques :
  - 2 bifurcations
  - 3 régimes distincts
- Régime **périodique** (quasi-linéaire).  
Un seul mode de vibration excité.
- Régime **quasi-périodique**.
  - Apparition de fréquences supplémentaires dans le spectre qui reste discret.
  - les fréquences qui apparaissent vérifient des relations du type:

$$\omega_i + \omega_j = \Omega,$$

avec :  $\omega_i, \omega_j$  : fréquences propres de la structure.

$\Omega$  : fréquence d'excitation.

↔ **échange d'énergie par résonance interne.**

- Observations génériques :
  - 2 bifurcations
  - 3 régimes distincts
- Régime **périodique** (quasi-linéaire).  
Un seul mode de vibration excité.
- Régime **quasi-périodique**.
  - Apparition de fréquences supplémentaires dans le spectre qui reste discret.
  - les fréquences qui apparaissent vérifient des relations du type:

$$\omega_i + \omega_j = \Omega,$$

avec :  $\omega_i, \omega_j$  : fréquences propres de la structure.

$\Omega$  : fréquence d'excitation.

↔ **échange d'énergie par résonance interne.**

- Régime **chaotique**.
  - spectre large bande
  - signaux temporels apériodiques.
  - son typique de la cymbale.

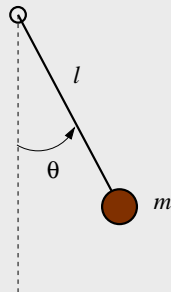
- 1 CYMBALES ET GONGS**
  - Présentation des instruments
  - Régime libre
  - Régime forcé
- 2 NON-LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE**
  - Définition
  - Exemples de modèles
  - Projection modale
- 3 TENDANCE DE NON-LINÉARITÉ**
  - Oscillateur de Duffing
  - comportement raidissant/assouplissant
- 4 COUPLAGES MODAUX**
  - Résonances internes
  - cas de la résonance 1:2
- 5 VIBRATIONS CHAOTIQUES**
  - Chaos temporel et turbulence
  - Transition vers le chaos



- Introduction par l'exemple : le cas du pendule.  
Equation du mouvement:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$



- Introduction par l'exemple : le cas du pendule.  
Equation du mouvement:

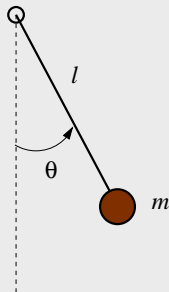
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$

- Petites amplitudes des oscillations :

$$\sin \theta \sim \theta$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$



- Introduction par l'exemple : le cas du pendule.  
Equation du mouvement:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$

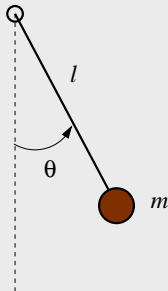
- Petites amplitudes des oscillations :

$$\sin \theta \sim \theta$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

- grandes amplitudes :  
On en peut plus linéariser !

↪ **non-linéarité géométrique**



- Lorsqu'on considère des grandes amplitudes, la relation entre le déplacement  $\underline{\xi}$  et les déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  ne peut plus être linéarisé. (On sort du cadre traditionnel H.P.P.)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \nabla \underline{\xi} + \nabla^t \underline{\xi} + \nabla^t \underline{\xi} \cdot \nabla \underline{\xi} \right)$$

- Lorsqu'on considère des grandes amplitudes, la relation entre le déplacement  $\underline{\xi}$  et les déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  ne peut plus être linéarisé. (On sort du cadre traditionnel H.P.P.)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \nabla \underline{\xi} + \nabla^t \underline{\xi} + \nabla^t \underline{\xi} \cdot \nabla \underline{\xi} \right)$$

- L'équation de la dynamique doit être révisée afin de tenir compte des grandes transformations :

$$\operatorname{div} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{f}} = \rho \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2},$$

où  $\underline{\underline{F}}$  est le tenseur gradient de transformation:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \nabla \underline{\xi}$$

- Lorsqu'on considère des grandes amplitudes, la relation entre le déplacement  $\underline{\xi}$  et les déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  ne peut plus être linéarisé. (On sort du cadre traditionnel H.P.P.)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \nabla \underline{\xi} + \nabla^t \underline{\xi} + \nabla^t \underline{\xi} \cdot \nabla \underline{\xi} \right)$$

- L'équation de la dynamique doit être révisée afin de tenir compte des grandes transformations :

$$\operatorname{div} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{f}} = \rho \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2},$$

où  $\underline{\underline{F}}$  est le tenseur gradient de transformation:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \nabla \underline{\xi}$$

- Enfin on suppose le comportement du matériau élastique linéaire:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}},$$

- Lorsqu'on considère des grandes amplitudes, la relation entre le déplacement  $\underline{\xi}$  et les déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  ne peut plus être linéarisé. (On sort du cadre traditionnel H.P.P.)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \nabla \underline{\xi} + \nabla^t \underline{\xi} + \nabla^t \underline{\xi} \cdot \nabla \underline{\xi} \right)$$

- L'équation de la dynamique doit être révisée afin de tenir compte des grandes transformations :

$$\operatorname{div} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) + \underline{\underline{f}} = \rho \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2},$$

où  $\underline{\underline{F}}$  est le tenseur gradient de transformation:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \nabla \underline{\xi}$$

- Enfin on suppose le comportement du matériau élastique linéaire:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda (\operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}},$$

- L'équation de la dynamique fait intervenir des termes en  $\underline{\xi}$ ,  $\underline{\xi}^2$  et  $\underline{\xi}^3$ .

- Dynamique d'une poutre en flexion, grandes amplitudes de vibration:

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left[ \frac{ES}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x, t).$$

$w(x, t)$  : déplacement transverse.

$E$  : module d'Young.

$\rho$  : masse surfacique.

$S$  : section de la poutre.

$I$  : moment d'inertie.

- non-linéarité cubique (symétrie).



- Modèle de Von Karman:

$$D\Delta\Delta w + \rho h\ddot{w} = L(w, F) - \mu\dot{w} + p(r, \theta, t),$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{Eh}{2}L(w, w)$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  : rigidité en flexion.

$F$  : représente les efforts membranaires.

$L$  : opérateur bilinéaire quadratique.

- non-linéarité cubique (symétrie).

- Tous les modèles (quelque soit la structure) sont de la forme :

$$\ddot{w} + \mathcal{L}(w) + \mathcal{N}_2(w, w) + \mathcal{N}_3(w, w, w) = p(\underline{x}, t)$$

- Stratégie de résolution adaptée à ces EDP.

- Résolution du problème linéaire:

$$\ddot{w} + \mathcal{L}(w) = 0$$

Les modes propres sont les fonctions adaptées, elles vérifient:

$$\mathcal{L}(\phi(x)) = \omega^2 \phi(x)$$

- Résolution du problème linéaire:

$$\ddot{w} + \mathcal{L}(w) = 0$$

Les modes propres sont les fonctions adaptées, elles vérifient:

$$\mathcal{L}(\phi(x)) = \omega^2 \phi(x)$$

- On a une infinité de modes propres  $\phi_p$ , à chaque mode étant associé une pulsation propre  $\omega_p$ .
- On a de plus la propriété d'orthogonalité :

$$\langle \phi_p | \phi_q \rangle = \delta_{p,q}$$

↔ Famille adaptée afin de projeter la dynamique.

Cymbales et  
Gongs

Non-linéarité  
géométrique

Définition  
Exemples de  
modèles

**Projection modale**

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale

- On décompose le déplacement inconnu selon:

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} X_p(t) \phi_p(\mathbf{x})$$

- On décompose le déplacement inconnu selon:

$$w(x, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} X_p(t) \phi_p(x)$$

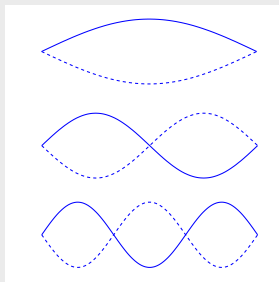
- En insérant ce développement dans l'équation linéaire  $\ddot{w} + \mathcal{L}(w) = 0$ , on obtient un ensemble d'oscillateurs linéaires découplés:

$$\forall n \geq 1, \quad \ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n = F_n(t)$$

- Les modes propres sont donnés par:

$$\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$



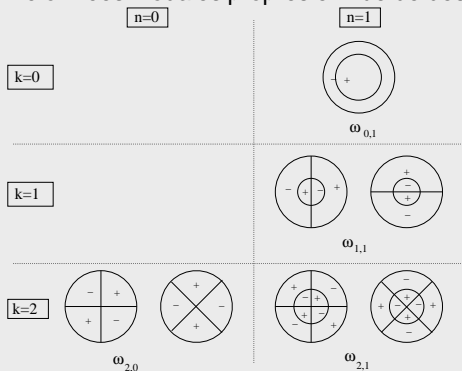
$$\phi_1(x), \quad \omega_1 = \pi c/L$$

$$\phi_2(x), \quad \omega_2 = 2\pi c/L$$

$$\phi_3(x), \quad \omega_3 = 3\pi c/L$$

## MODES PROPRES POUR UNE PLAQUE CIRCULAIRE

- Déformées modales propres en vue de dessus :



- Soit  $k$  le nombre de diamètres nodaux,  $n$  le nombre de cercles nodaux. Un mode est désigné par le doublet  $(k, n)$ .
- Si  $k = 0$  : mode *axisymétrique*. Sinon mode *asymétrique*.



# MODES PROPRES POUR UNE PLAQUE CIRCULAIRE

Cymbales et  
Gongs

Non-linéarité  
géométrique

Définition

Exemples de  
modèles

Projection modale

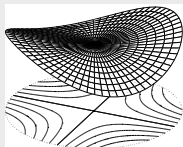
Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

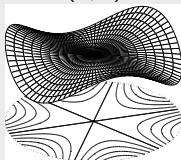
Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale

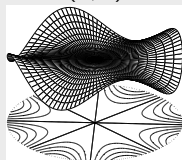
(2, 0)



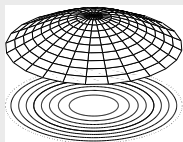
(3, 0)



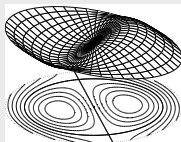
(4, 0)



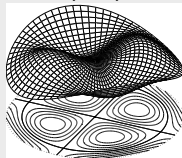
(0, 1)



(1, 1)



(2, 1)



## MODES PROPRES POUR UNE PLAQUE CIRCULAIRE

Cymbales et  
Gongs

Non-linéarité  
géométrique

Définition

Exemples de  
modèles

Projection modale

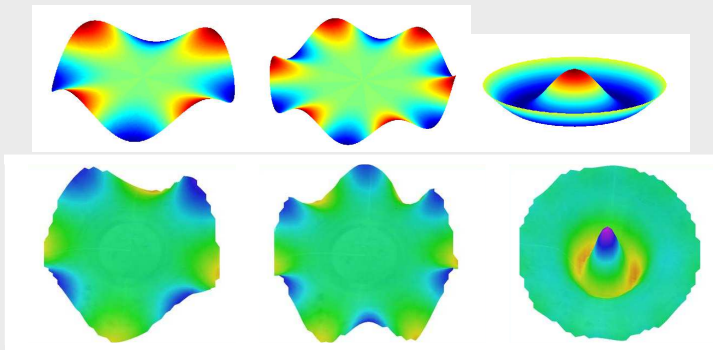
Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

Vibrations  
chaotiques

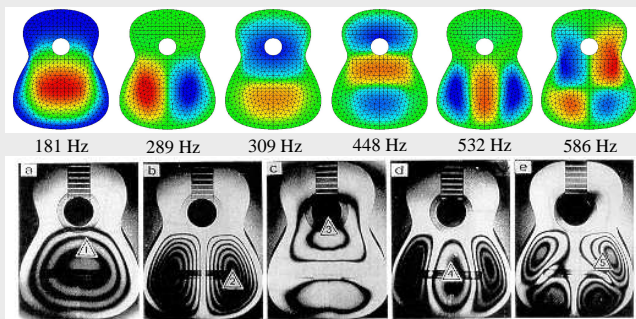
Conclusion  
générale

- Comparaison théorie/expérience, mesure réalisée à l'UME par vibrométrie laser à balayage.



## AUTRE EXEMPLE : LA GUITARE

- Mesure expérimentale par interférométrie holographique, comparée au calcul numérique :



- Pour le problème complet non-linéaire:

$$\ddot{w} + \mathcal{L}(w) + \mathcal{N}_2(w, w) + \mathcal{N}_3(w, w, w) = p(\underline{x}, t),$$

On utilise la même décomposition:

$$w(\underline{x}, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} X_p(t) \phi_p(\underline{x})$$

- Pour le problème complet non-linéaire:

$$\ddot{w} + \mathcal{L}(w) + \mathcal{N}_2(w, w) + \mathcal{N}_3(w, w, w) = p(\underline{x}, t),$$

On utilise la même décomposition:

$$w(\underline{x}, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} X_p(t) \phi_p(\underline{x})$$

- On obtient:

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} g_{ij}^n X_i X_j + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} h_{ijk}^n X_i X_j X_k = F_n(t)$$

- Pour le problème complet non-linéaire:

$$\ddot{w} + \mathcal{L}(w) + \mathcal{N}_2(w, w) + \mathcal{N}_3(w, w, w) = p(\underline{x}, t),$$

On utilise la même décomposition:

$$w(\underline{x}, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} X_p(t) \phi_p(\underline{x})$$

- On obtient:

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} g_{ij}^n X_i X_j + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} h_{ijk}^n X_i X_j X_k = F_n(t)$$

- Conséquences:
  - oscillateurs non-linéaires **couplés**.
  - plus de théorème de superposition.
  - termes de couplage responsables des transferts d'énergie.

## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- Non-linéarité **géométrique** : grandes amplitudes de vibrations.  
Pour une structure mince, épaisseur  $h$ , effets remarquables dès que:

$$w(x, t) \sim h/10$$

## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- Non-linéarité **géométrique** : grandes amplitudes de vibrations.  
Pour une structure mince, épaisseur  $h$ , effets remarquables dès que:

$$w(x, t) \sim h/10$$

- Non-linéarité **polynômiale**, termes quadratiques et cubiques uniquement.



## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- Non-linéarité **géométrique** : grandes amplitudes de vibrations.  
Pour une structure mince, épaisseur  $h$ , effets remarquables dès que:

$$w(x, t) \sim h/10$$

- Non-linéarité **polynômiale**, termes quadratiques et cubiques uniquement.
- utilisation de la base des modes propres pour discrétiser les EDP du mouvement.

## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- Non-linéarité **géométrique** : grandes amplitudes de vibrations.  
Pour une structure mince, épaisseur  $h$ , effets remarquables dès que:

$$w(x, t) \sim h/10$$

- Non-linéarité **polynômiale**, termes quadratiques et cubiques uniquement.
- utilisation de la base des modes propres pour discrétiser les EDP du mouvement.
- En décomposant le déplacement selon :

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} X_p(t) \phi_p(\mathbf{x})$$

On aboutit à :

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} g_{ij}^n X_i X_j + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} h_{ijk}^n X_i X_j X_k = F_n(t)$$

↔ L'étude des régimes de ce système va nous permettre de comprendre le son typique des cymbales et des gongs.

- 1 CYMBALES ET GONGS**
  - Présentation des instruments
  - Régime libre
  - Régime forcé
- 2 NON-LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE**
  - Définition
  - Exemples de modèles
  - Projection modale
- 3 TENDANCE DE NON-LINÉARITÉ**
  - Oscillateur de Duffing
  - comportement raidissant/assouplissant
- 4 COUPLAGES MODAUX**
  - Résonances internes
  - cas de la résonance 1:2
- 5 VIBRATIONS CHAOTIQUES**
  - Chaos temporel et turbulence
  - Transition vers le chaos

- Lorsque l'on tronque le système d'oscillateur à  $N=1$ :  
↪ oscillateur de Duffing.
- Si le système est symétrique (plaque):

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + h_{nnn}^n X_n^3 = F_n(t)$$

↪ non-linéarité cubique uniquement.

- Si le système est non-symétrique (plaque imparfaite, coque):

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + g_{nn}^n X_n^2 + h_{nnn}^n X_n^3 = F_n(t)$$

## OSCILLATEUR DE DUFFING

- Lorsque l'on tronque le système d'oscillateur à  $N=1$ :  
↪ oscillateur de Duffing.

- Si le système est symétrique (plaque):

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + h_{nnn}^n X_n^3 = F_n(t)$$

↪ non-linéarité cubique uniquement.

- Si le système est non-symétrique (plaque imparfaite, coque):

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + g_{nn}^n X_n^2 + h_{nnn}^n X_n^3 = F_n(t)$$

- Propriété caractéristique des oscillations non-linéaires :  
**La fréquence des oscillations dépend  
de l'amplitude de vibration.**

# FRÉQUENCE ET AMPLITUDE D'OSCILLATIONS

## CAS DU PENDULE

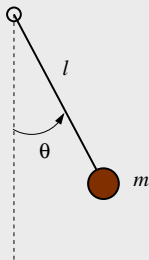
- Equation du mouvement:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$

- En ne conservant que le premier terme non-linéaire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 = 0$$



# FRÉQUENCE ET AMPLITUDE D'OSCILLATIONS

CAS DU PENDULE

Cymbales et  
Gongs

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Oscillateur de  
Duffing

comportement  
raidis-  
sant/assouplissant

Couplages  
modaux

Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale

- Equation du mouvement:

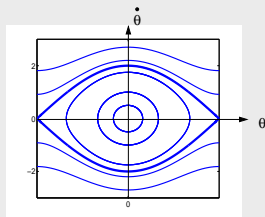
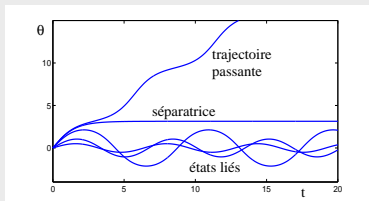
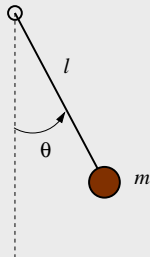
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

avec  $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$

- En ne conservant que le premier terme non-linéaire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 = 0$$

- Trajectoires possibles :



- **Définition** : On appelle *tendance de non-linéarité* la dépendance de la fréquence des oscillations avec l'amplitude.
  - ▶ Si la fréquence **augmente** avec l'amplitude : on dit que le comportement est **raidissant**.
  - ▶ Si la fréquence **diminue** avec l'amplitude : on dit que le comportement est **assouplissant**.



## TENDANCE DE NON-LINÉARITÉ

- **Définition** : On appelle *tendance de non-linéarité* la dépendance de la fréquence des oscillations avec l'amplitude.

- ▶ Si la fréquence **augmente** avec l'amplitude : on dit que le comportement est **raidissant**.

- ▶ Si la fréquence **diminue** avec l'amplitude : on dit que le comportement est **assouplissant**.

- Sens physique :

- ▶ comportement assouplissant:

force de rappel en

$$kX(1 - \alpha X^2)$$

↔ diminue quand l'amplitude augmente.  
(cas du pendule).

- ▶ comportement raidissant:

force de rappel en

$$kX(1 + \beta X^2)$$

↔ augmente quand l'amplitude augmente.

## TENDANCE DE NON-LINÉARITÉ

- Calcul perturbatif: sur un oscillateur :

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + h_{nnn}^n X_n^3 = 0$$

↪ dépendance analytique de la fréquence des oscillations non-linéaires  $\omega_{NL}$  en fonction de l'amplitude des oscillations  $a$ :

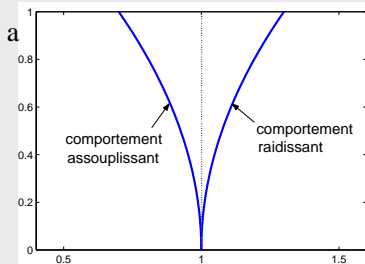
$$X_n(t) = a \cos(\omega_{NL} t + \phi)$$

avec

$$\omega_{NL} = \omega_n \left( 1 + \frac{3h_{nnn}^n a^2}{8\omega_p^2} \right)$$

▷ Si  $h_{nnn}^n > 0$  :  
comportement *raidissant*.

▷ Si  $h_{nnn}^n < 0$  :  
comportement *assouplissant*.



- Pour un oscillateur avec NL quadratique:

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + g_{nn}^n X_n^2 + h_{nnn}^n X_n^3 = 0$$

La tendance de non-linéarité s'exprime selon :

$$\omega_{NL} = \omega_n \left( 1 + \frac{1}{8\omega_n^2} \left( 3h_{nnn}^n - \frac{10g_{nn}^n}{3\omega_n^2} \right) a^2 \right)$$

↔ le comportement raidissant/assouplissant dépend des valeurs relatives de la non-linéarité quadratique et cubique.

- Pour un oscillateur avec NL quadratique:

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + g_{nn}^n X_n^2 + h_{nnn}^n X_n^3 = 0$$

La tendance de non-linéarité s'exprime selon :

$$\omega_{NL} = \omega_n \left( 1 + \frac{1}{8\omega_n^2} \left( 3h_{nnn}^n - \frac{10g_{nn}^n}{3\omega_n^2} \right) a^2 \right)$$

↔ le comportement raidissant/assouplissant dépend des valeurs relatives de la non-linéarité quadratique et cubique.

- Pour une plaque parfaite on a toujours :  $h_{nnn}^n > 0$ .

- Pour un oscillateur avec NL quadratique:

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + g_{nn}^n X_n^2 + h_{nnn}^n X_n^3 = 0$$

La tendance de non-linéarité s'exprime selon :

$$\omega_{NL} = \omega_n \left( 1 + \frac{1}{8\omega_n^2} \left( 3h_{nnn}^n - \frac{10g_{nn}^n}{3\omega_n^2} \right) a^2 \right)$$

↔ le comportement raidissant/assouplissant dépend des valeurs relatives de la non-linéarité quadratique et cubique.

- Pour une plaque parfaite on a toujours :  $h_{nnn}^n > 0$ .
- Dès qu'une légère imperfection existe, alors  $g_{nn}^n \nearrow$ .

↔ le comportement peut être soit raidissant, soit assouplissant, selon la courbure (le degré de l'imperfection).

## RÉGIME FORCÉ

- Si l'on considère un oscillateur non-linéaire forcé à la résonance:

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + g_{nn}^n X_n^2 + h_{nnn}^n X_n^3 = F \cos \Omega t$$

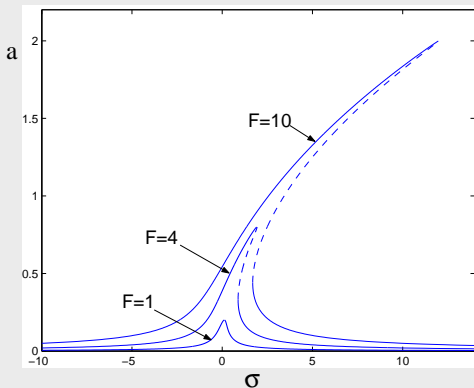
avec  $\Omega \sim \omega_n$ , et un comportement raidissant.

- Si l'on considère un oscillateur non-linéaire forcé à la résonance:

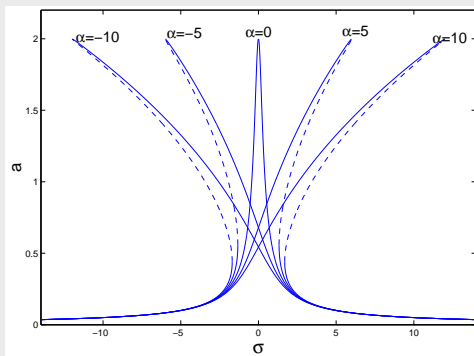
$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + g_{nn}^n X_n^2 + h_{nnn}^n X_n^3 = F \cos \Omega t$$

avec  $\Omega \sim \omega_n$ , et un comportement raidissant.

- Courbes de réponse en fréquence :



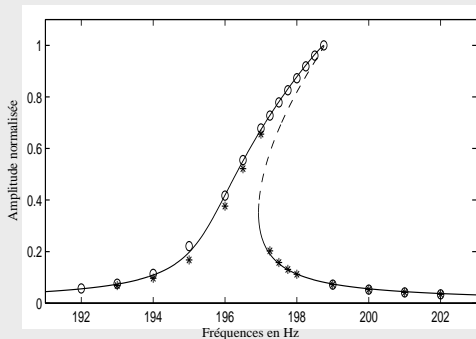
■ Effet de la tendance de non-linéarité :



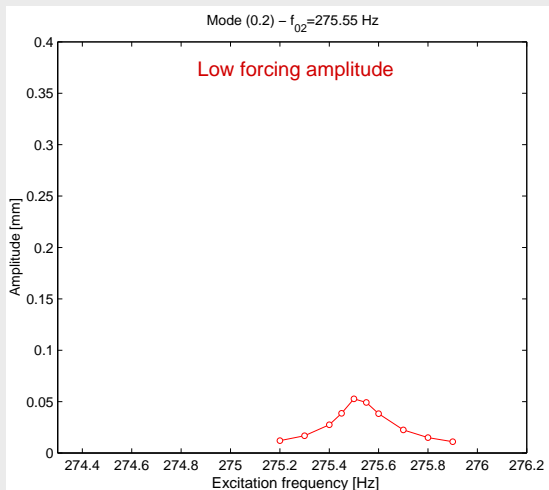


## VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES

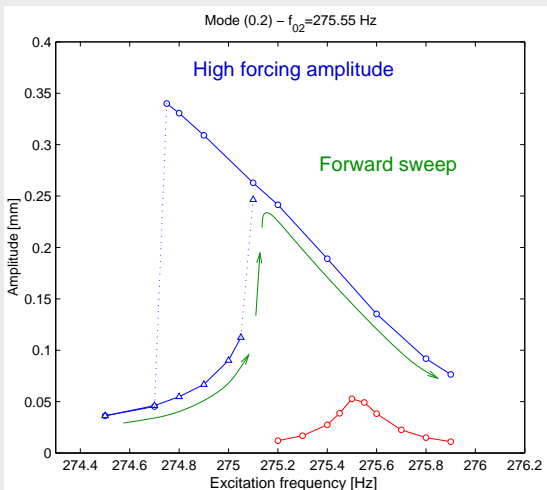
- Vibrations forcées, amplitudes modérées, comparaison mesures/expériences sur une plaque circulaire à bord libre, épaisseur  $h=1.5$  mm, diamètre 22cm:



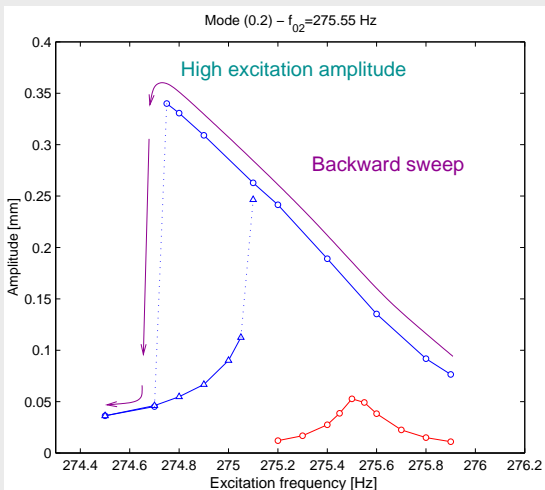
## ■ Vibrations forcées, coque sphérique:



## ■ Vibrations forcées, coque sphérique:

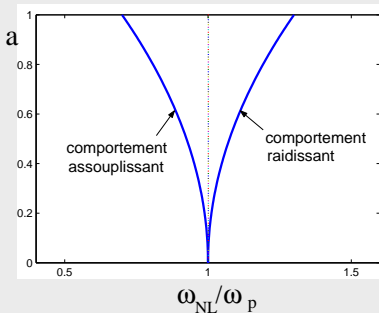


## ■ Vibrations forcées, coque sphérique:



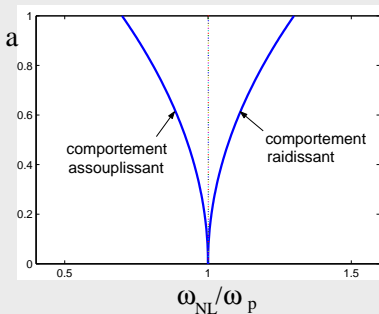
- Comportement raidissant/assouplissant:  
↔ **glissement de fréquence.**

- Comportement raidissant/assouplissant:  
↪ **glissement de fréquence.**
- Perceptivement on peut entendre très nettement des fréquences soit montantes, soit descendantes.



## EFFET MUSICAL

- Comportement raidissant/assouplissant:  
↔ **glissement de fréquence.**
- Perceptivement on peut entendre très nettement des fréquences soit montantes, soit descendantes.



- raidissant  $\rightsquigarrow$  fréquence *descendante*.  
assouplissant  $\rightsquigarrow$  fréquence *montante*.  
Exemples des gongs d'opéra chinois, glissements de fréquences de plus d'un demi-ton !

## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- En réduisant la dynamique complète :

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} g_{ij}^n X_i X_j + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} h_{ijk}^n X_i X_j X_k = F_n(t)$$

à un seul oscillateur,

↪ **oscillateur de Duffing.**



## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- En réduisant la dynamique complète :

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} g_{ij}^n X_i X_j + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} h_{ijk}^n X_i X_j X_k = F_n(t)$$

à un seul oscillateur,

↪ **oscillateur de Duffing**.

- La fréquence des oscillations dépend de l'amplitude.  
Le comportement est soit **raidissant**, soit **assouplissant**.

## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- En réduisant la dynamique complète :

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} g_{ij}^n X_i X_j + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} h_{ijk}^n X_i X_j X_k = F_n(t)$$

à un seul oscillateur,

↪ **oscillateur de Duffing.**

- La fréquence des oscillations dépend de l'amplitude.  
Le comportement est soit **raidissant**, soit **assouplissant**.
- Pour une plaque, le comportement est toujours **raidissant**.  
L'ajout d'une courbure (une imperfection) introduit une non-linéarité quadratique  
↪ le comportement peut devenir **assouplissant**.

## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- En réduisant la dynamique complète :

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} g_{ij}^n X_i X_j + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} h_{ijk}^n X_i X_j X_k = F_n(t)$$

à un seul oscillateur,

↪ **oscillateur de Duffing**.

- La fréquence des oscillations dépend de l'amplitude.  
Le comportement est soit **raidissant**, soit **assouplissant**.
- Pour une plaque, le comportement est toujours **raidissant**.  
L'ajout d'une courbure (une imperfection) introduit une non-linéarité quadratique  
↪ le comportement peut devenir **assouplissant**.
- Explication des glissements de fréquences que l'on entend de manière marquée dans les gongs épais (gong d'opéra chinois).

## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- En réduisant la dynamique complète :

$$\ddot{X}_n + \omega_n^2 X_n + 2\mu_n \dot{X}_n + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} g_{ij}^n X_i X_j + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j \geq i}^{+\infty} \sum_{k \geq j}^{+\infty} h_{ijk}^n X_i X_j X_k = F_n(t)$$

à un seul oscillateur,

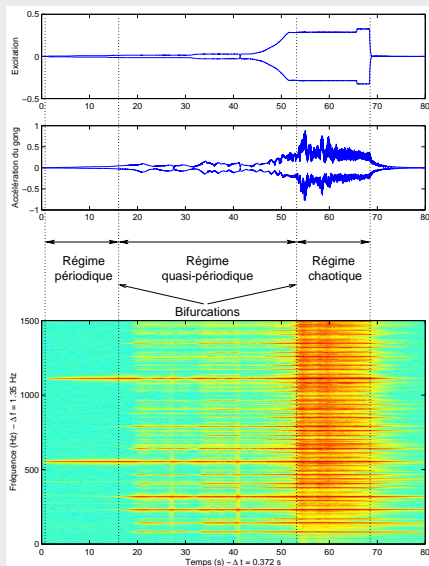
↪ **oscillateur de Duffing**.

- La fréquence des oscillations dépend de l'amplitude.  
Le comportement est soit **raidissant**, soit **assouplissant**.
- Pour une plaque, le comportement est toujours **raidissant**.  
L'ajout d'une courbure (une imperfection) introduit une non-linéarité quadratique  
↪ le comportement peut devenir **assouplissant**.
- Explication des glissements de fréquences que l'on entend de manière marquée dans les gongs épais (gong d'opéra chinois).
- Cependant, en restreignant la dynamique à un seul oscillateur on ne peut pas comprendre le son brillant (le spectre large bande) typique des cymbales.

- 1 CYMBALES ET GONGS**
  - Présentation des instruments
  - Régime libre
  - Régime forcé
- 2 NON-LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE**
  - Définition
  - Exemples de modèles
  - Projection modale
- 3 TENDANCE DE NON-LINÉARITÉ**
  - Oscillateur de Duffing
  - comportement raidissant/assouplissant
- 4 COUPLAGES MODAUX**
  - Résonances internes
  - cas de la résonance 1:2
- 5 VIBRATIONS CHAOTIQUES**
  - Chaos temporel et turbulence
  - Transition vers le chaos

# RAPPEL : RÉGIME FORCÉ

## CAS D'UN GONG, FRÉQUENCE D'EXCITATION 556 Hz



## COUPLAGES DANS LE RÉGIME QUASIPÉRIODIQUE

Cymbales et  
Gongs

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

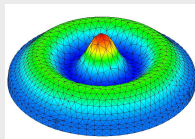
**Résonances  
internes**

cas de la  
résonance 1:2

Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale

- Mode (0,3) excité à la résonance :



## COUPLAGES DANS LE RÉGIME QUASIPÉRIODIQUE

Cymbales et  
Gongs

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

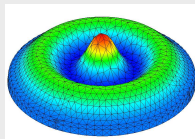
Résonances  
internes

cas de la  
résonance 1:2

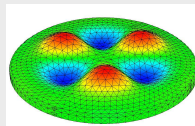
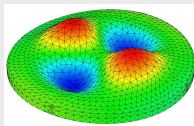
Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale

- Mode (0,3) excité à la résonance :



- Fréquences principales apparaissant : modes (2,1) et (3,1)



- On a la relation :

$$\omega_{(3,0)} = \omega_{(2,1)} + \omega_{(3,1)}$$



## COUPLAGES DANS LE RÉGIME QUASIPÉRIODIQUE

- **Définition :** On dit que l'on a une résonance interne d'ordre 2 dès qu'une relation du type :

$$\omega_j = \omega_p \pm \omega_n$$

est vérifiée.

- Ces relations de résonance interne proviennent de la non-linéarité quadratique.  
(des relations équivalentes existent à l'ordre 3)

## COUPLAGES DANS LE RÉGIME QUASIPÉRIODIQUE

Cymbales et  
Gongs

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

Résonances  
internes

cas de la  
résonance 1:2

Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale

- **Définition** : On dit que l'on a une résonance interne d'ordre 2 dès qu'une relation du type :

$$\omega_j = \omega_p \pm \omega_n$$

est vérifiée.

- Ces relations de résonance interne proviennent de la non-linéarité quadratique.  
(des relations équivalentes existent à l'ordre 3)
- Le cas particulier :

$$\omega_j = 2\omega_p$$

est appelé **résonance 1:2**

## COUPLAGES DANS LE RÉGIME QUASIPÉRIODIQUE

- **Définition** : On dit que l'on a une résonance interne d'ordre 2 dès qu'une relation du type :

$$\omega_j = \omega_p \pm \omega_n$$

est vérifiée.

- Ces relations de résonance interne proviennent de la non-linéarité quadratique.  
(des relations équivalentes existent à l'ordre 3)
- Le cas particulier :

$$\omega_j = 2\omega_p$$

est appelé **résonance 1:2**

- Comment ces relations de résonances internes peuvent expliquer les transferts d'énergie entre oscillateurs ?

■ Supposons que seul l'oscillateur  $j$  possède de l'énergie:  
 $X_j \neq 0, \forall p \neq j, X_p = 0.$

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + 2\mu_1 \dot{X}_1 + g_{11}^1 X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + 2\mu_p \dot{X}_p + g_{11}^p X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_j + \omega_j^2 X_j + 2\mu_j \dot{X}_j + g_{11}^j X_1^2 + \dots = 0$$

- Supposons que seul l'oscillateur  $j$  possède de l'énergie:  
 $X_j \neq 0, \forall p \neq j, X_p = 0.$

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + 2\mu_1 \dot{X}_1 + g_{11}^1 X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + 2\mu_p \dot{X}_p + g_{11}^p X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_j + \omega_j^2 X_j + 2\mu_j \dot{X}_j + g_{11}^j X_1^2 + \dots = 0$$

- Solution au premier ordre :

$$X_j(t) = a_j(t) \cos(\omega_j t) + b_j(t) \sin(\omega_j t)$$

- Supposons que seul l'oscillateur  $j$  possède de l'énergie:  
 $X_j \neq 0, \forall p \neq j, X_p = 0.$

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + 2\mu_1 \dot{X}_1 + g_{11}^1 X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + 2\mu_p \dot{X}_p + g_{11}^p X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_j + \omega_j^2 X_j + 2\mu_j \dot{X}_j + g_{11}^j X_1^2 + \dots = 0$$

- Solution au premier ordre :

$$X_j(t) = a_j(t) \cos(\omega_j t) + b_j(t) \sin(\omega_j t)$$

$$X_j(t) = A_j(t) e^{i\omega_j t} + B_j(t) e^{-i\omega_j t}$$

## TRANSFERTS D'ÉNERGIE

- Supposons que seul l'oscillateur  $j$  possède de l'énergie:

$$X_j \neq 0, \forall p \neq j, X_p = 0.$$

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + 2\mu_1 \dot{X}_1 + g_{11}^1 X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + 2\mu_p \dot{X}_p + g_{11}^p X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_j + \omega_j^2 X_j + 2\mu_j \dot{X}_j + g_{11}^j X_1^2 + \dots = 0$$

- Solution au premier ordre :

$$X_j(t) = a_j(t) \cos(\omega_j t) + b_j(t) \sin(\omega_j t)$$

$$X_j(t) = A_j(t) e^{i\omega_j t} + B_j(t) e^{-i\omega_j t}$$

- Les termes en  $X_j$  présents dans le système vont faire apparaître :

$$X_j \sim e^{\pm i\omega_j t}$$

## TRANSFERTS D'ÉNERGIE

- Supposons que seul l'oscillateur  $j$  possède de l'énergie:

$$X_j \neq 0, \forall p \neq j, X_p = 0.$$

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + 2\mu_1 \dot{X}_1 + g_{11}^1 X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + 2\mu_p \dot{X}_p + g_{11}^p X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_j + \omega_j^2 X_j + 2\mu_j \dot{X}_j + g_{11}^j X_1^2 + \dots = 0$$

- Solution au premier ordre :

$$X_j(t) = a_j(t) \cos(\omega_j t) + b_j(t) \sin(\omega_j t)$$

$$X_j(t) = A_j(t) e^{i\omega_j t} + B_j(t) e^{-i\omega_j t}$$

- Un terme en  $X_j^2$  fait apparaître la composante :

$$X_j^2 \sim e^{2i\omega_j t}$$



## TRANSFERTS D'ÉNERGIE

■ Supposons que seul l'oscillateur  $j$  possède de l'énergie:

$$X_j \neq 0, \forall p \neq j, X_p = 0.$$

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + 2\mu_1 \dot{X}_1 + g_{11}^1 X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + 2\mu_p \dot{X}_p + g_{11}^p X_1^2 + \dots + g_{jj}^p X_j^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_j + \omega_j^2 X_j + 2\mu_j \dot{X}_j + g_{11}^j X_1^2 + \dots = 0$$

■ Un terme en  $X_j^2$  fait apparaitre la composante :

$$X_j^2 \sim e^{2i\omega_j t}$$

■ Si de plus on a la relation :  $\omega_p = 2\omega_j$ ,

alors le terme  $g_{jj}^p X_j^2 \sim e^{i\omega_p t}$

est un terme de forçage à la résonance pour l'oscillateur  $p$ .

## TRANSFERTS D'ÉNERGIE

■ Supposons que seul l'oscillateur  $j$  possède de l'énergie:

$$X_j \neq 0, \forall p \neq j, X_p = 0.$$

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + 2\mu_1 \dot{X}_1 + g_{11}^1 X_1^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + 2\mu_p \dot{X}_p + g_{11}^p X_1^2 + \dots + g_{jj}^p X_j^2 + \dots = 0$$

...

$$\ddot{X}_j + \omega_j^2 X_j + 2\mu_j \dot{X}_j + g_{11}^j X_1^2 + \dots = 0$$

■ Un terme en  $X_j^2$  fait apparaitre la composante :

$$X_j^2 \sim e^{2i\omega_j t}$$

■ Si de plus on a la relation :  $\omega_p = 2\omega_j$ ,

alors le terme  $g_{jj}^p X_j^2 \sim e^{i\omega_p t}$

**est un terme de forçage à la résonance pour l'oscillateur  $p$ .**

↪ **Le transfert d'énergie est rendu possible.**

## FORMES NORMALES

- Le raisonnement précédent s'étend afin d'expliquer pourquoi les relations de résonance interne sont responsables des transferts d'énergie.

## FORMES NORMALES

- Le raisonnement précédent s'étend afin d'expliquer pourquoi les relations de résonance interne sont responsables des transferts d'énergie.
- Plus généralement, les résultats précédents sont fondés sur **la théorie des formes normales**, qui reposent sur deux théorèmes fondamentaux (Poincaré et Poincaré-Dulac).

## FORMES NORMALES

- Le raisonnement précédent s'étend afin d'expliquer pourquoi les relations de résonance interne sont responsables des transferts d'énergie.
- Plus généralement, les résultats précédents sont fondés sur **la théorie des formes normales**, qui reposent sur deux théorèmes fondamentaux (Poincaré et Poincaré-Dulac).
- Idée de Poincaré : Partant d'un système dynamique :  $\dot{X} = F(X)$ , puis-je trouver un changement de variables non-linéaires :  $X = h(Y)$ , tel que le système dynamique résultant :  $\dot{Y} = G(Y)$  soit le plus simple possible ?

## FORMES NORMALES

- Le raisonnement précédent s'étend afin d'expliquer pourquoi les relations de résonance interne sont responsables des transferts d'énergie.
- Plus généralement, les résultats précédents sont fondés sur **la théorie des formes normales**, qui reposent sur deux théorèmes fondamentaux (Poincaré et Poincaré-Dulac).
- Idée de Poincaré : Partant d'un système dynamique :  $\dot{X} = F(X)$ , puis-je trouver un changement de variables non-linéaires :  $X = h(Y)$ , tel que le système dynamique résultant :  $\dot{Y} = G(Y)$  soit le plus simple possible ?
- La réponse est **oui, s'il n'y a pas de relations de résonance interne** (*Théorème de Poincaré*).  
On montre que le changement de variables existe, et que la dynamique résultante est **linéaire** :  $\dot{Y} = AY$ .

- Le raisonnement précédent s'étend afin d'expliquer pourquoi les relations de résonance interne sont responsables des transferts d'énergie.
- Plus généralement, les résultats précédents sont fondés sur **la théorie des formes normales**, qui reposent sur deux théorèmes fondamentaux (Poincaré et Poincaré-Dulac).
- Idée de Poincaré : Partant d'un système dynamique :  $\dot{X} = F(X)$ , puis-je trouver un changement de variables non-linéaires :  $X = h(Y)$ , tel que le système dynamique résultant :  $\dot{Y} = G(Y)$  soit le plus simple possible ?
- La réponse est **oui, s'il n'y a pas de relations de résonance interne** (*Théorème de Poincaré*).  
On montre que le changement de variables existe, et que la dynamique résultante est **linéaire** :  $\dot{Y} = AY$ .
- S'il existe des relations de résonance interne, alors on peut trouver un changement de variables qui éliminent tous les termes non-résonnants (*Théorème de Poincaré-Dulac*). Le système résultant, plus simple, est appelé **la forme normale**.

## RÉSONANCE 1:2 – DYNAMIQUE

- Supposons  $\omega_2 = 2\omega_1$ . De plus le forçage est uniquement sur le second oscillateur. La forme normale s'écrit:

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + 2\mu_1 \dot{X}_1 + g_{12}^1 X_1 X_2 = 0$$

$$\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 + 2\mu_2 \dot{X}_2 + g_{11}^2 X_1^2 = F \cos \Omega t$$

et  $\Omega \sim \omega_2$ .



## RÉSONANCE 1:2 – DYNAMIQUE

- Supposons  $\omega_2 = 2\omega_1$ . De plus le forçage est uniquement sur le second oscillateur. La forme normale s'écrit:

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + 2\mu_1 \dot{X}_1 + g_{12}^1 X_1 X_2 = 0$$

$$\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 + 2\mu_2 \dot{X}_2 + g_{11}^2 X_1^2 = F \cos \Omega t$$

et  $\Omega \sim \omega_2$ .

- Question : comment de l'énergie peut-elle être transférée de l'oscillateur 2 vers l'oscillateur 1 ?

## RÉSONANCE 1:2 – DYNAMIQUE

- Supposons  $\omega_2 = 2\omega_1$ . De plus le forçage est uniquement sur le second oscillateur. La forme normale s'écrit:

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + 2\mu_1 \dot{X}_1 + g_{12}^1 X_1 X_2 = 0$$

$$\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 + 2\mu_2 \dot{X}_2 + g_{11}^2 X_1^2 = F \cos \Omega t$$

et  $\Omega \sim \omega_2$ .

- Question : comment de l'énergie peut-elle être transférée de l'oscillateur 2 vers l'oscillateur 1 ?
- tant que  $X_1 = 0$  :

$$\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 + 2\mu_2 \dot{X}_2 = F \cos \Omega t$$

↪ Réponse en fréquence linéaire.

Cymbales et  
Gongs

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

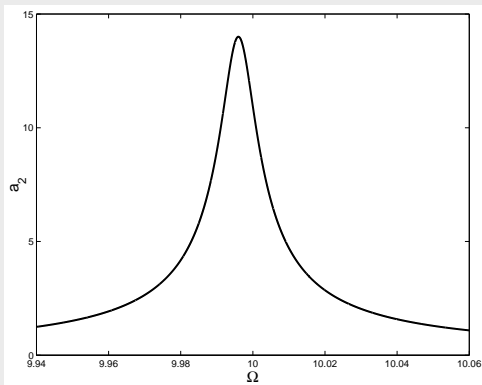
Résonances  
internes

**cas de la  
résonance 1:2**

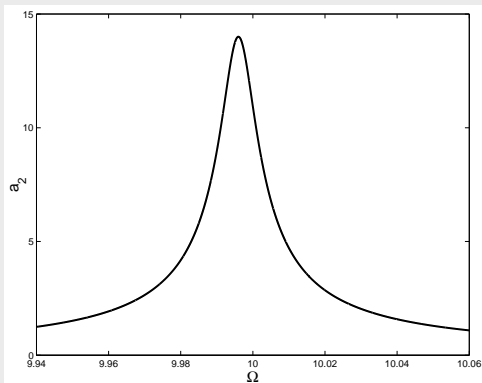
Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale

- tant que  $X_1 = 0$  :

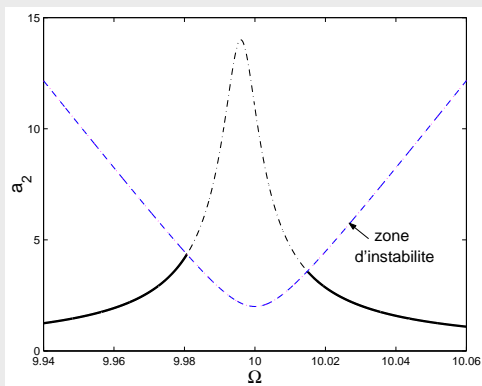


- tant que  $X_1 = 0$  :

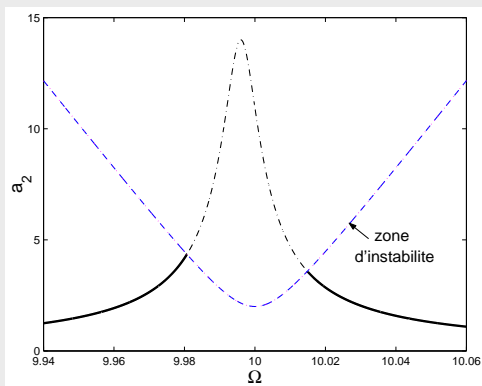


- Analyse de stabilité de ces solutions par rapport aux perturbations apportées par  $X_1$  : on montre analytiquement l'existence d'une zone d'instabilité (à cause de la résonance interne).

## ■ Zone d'instabilité :

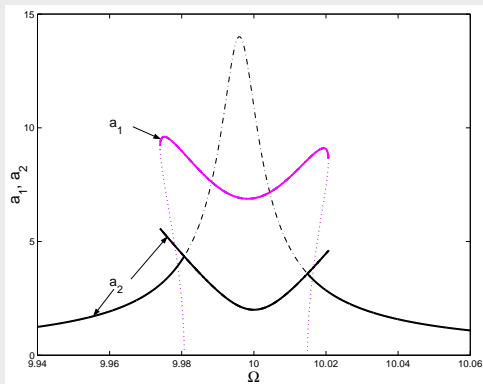


## ■ Zone d'instabilité :

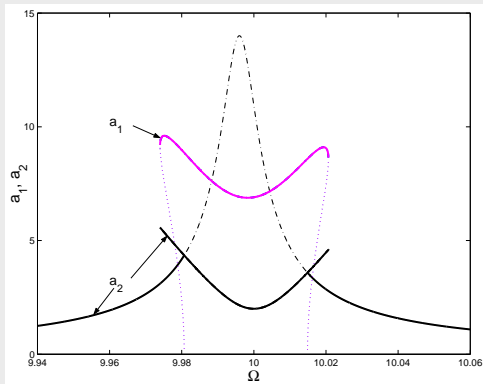


- Dès que la courbe pénètre à l'intérieur de cette zone, des solutions couplées peuvent exister.

## ■ Solutions couplées :



## ■ Solutions couplées :



## ■ Transfert d'énergie via la résonance interne.



Cymbales et  
Gongs

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

Résonances  
internes

**cas de la  
résonance 1:2**

Vibrations  
chaotiques

Conclusion  
générale

- Exemple de la résonance 1:2  
↔ mise en évidence du transfert d'énergie (pour certaines valeurs de fréquences et d'amplitude du forçage).

## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- Exemple de la résonance 1:2  
↔ mise en évidence du transfert d'énergie (pour certaines valeurs de fréquences et d'amplitude du forçage).
- Mécanisme générique qui se généralise à toutes les relations de résonance interne.  
↔ permet d'expliquer comment l'énergie se transfère entre les modes lors du régime quasipériodique.

## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- Exemple de la résonance 1:2  
↔ mise en évidence du transfert d'énergie (pour certaines valeurs de fréquences et d'amplitude du forçage).
- Mécanisme générique qui se généralise à toutes les relations de résonance interne.  
↔ permet d'expliquer comment l'énergie se transfère entre les modes lors du régime quasipériodique.
- Excitation d'un grand nombre de modes  
↔ la dimension de l'espace des phases augmente.  
↔ possibilité d'avoir des dynamiques plus complexes.

## CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

- Exemple de la résonance 1:2  
↔ mise en évidence du transfert d'énergie (pour certaines valeurs de fréquences et d'amplitude du forçage).
- Mécanisme générique qui se généralise à toutes les relations de résonance interne.  
↔ permet d'expliquer comment l'énergie se transfère entre les modes lors du régime quasipériodique.
- Excitation d'un grand nombre de modes  
↔ la dimension de l'espace des phases augmente.  
↔ possibilité d'avoir des dynamiques plus complexes.
- Dernière transition : obtention d'un régime de vibrations chaotiques.

## 1 CYMBALES ET GONGS

- Présentation des instruments
- Régime libre
- Régime forcé

## 2 NON-LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE

- Définition
- Exemples de modèles
- Projection modale

## 3 TENDANCE DE NON-LINÉARITÉ

- Oscillateur de Duffing
- comportement raidissant/assouplissant

## 4 COUPLAGES MODAUX

- Résonances internes
- cas de la résonance 1:2

## 5 VIBRATIONS CHAOTIQUES

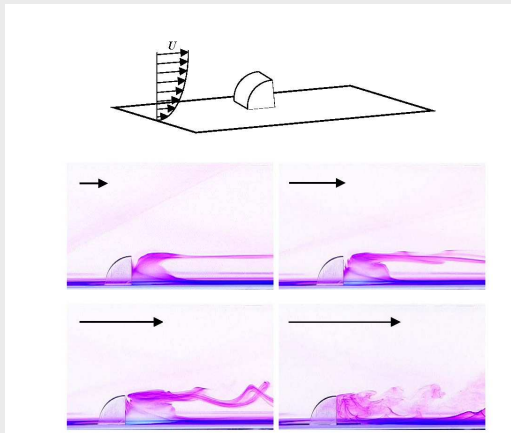
- Chaos temporel et turbulence
- Transition vers le chaos

## CHAOS TEMPOREL ET TURBULENCE

- La situation décrite pour les cymbales présente de nombreux points communs avec la transition vers la turbulence en hydrodynamique.

## CHAOS TEMPOREL ET TURBULENCE

- La situation décrite pour les cymbales présente de nombreux points communs avec la transition vers la turbulence en hydrodynamique.
- Écoulement derrière un obstacle :



## CHAOS TEMPOREL ET TURBULENCE

- La situation décrite pour les cymbales présente de nombreux points communs avec la transition vers la turbulence en hydrodynamique.
- Écoulement derrière un cylindre :

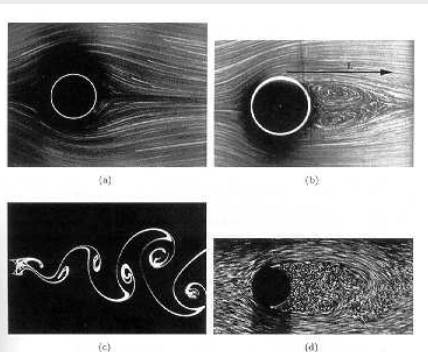


FIG. 2.8 - Visualisation d'un écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds ; (a) écoulement symétrique entre amont et aval à petit nombre de Reynolds ( $Re = 1,54$ ) ; (b) apparition de deux zones de recirculation fixes en arrière du cylindre ( $Re = 200$ ) ; (c) émission périodique de tourbillons formant une allée de Karman ( $Re = 0,8.10^3$ ) ; (d) sillage turbulent ( $Re = 0,8.10^3$ ) (photos a, b et c : S. Taneda, photo d : H. Werté).



- L'essentiel des idées mathématiques pour expliquer la transition vers la turbulence dans les fluides provient de la théorie des systèmes dynamiques :

$$\dot{X} = F(X)$$

- L'essentiel des idées mathématiques pour expliquer la transition vers la turbulence dans les fluides provient de la théorie des systèmes dynamiques :

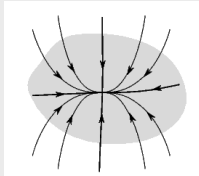
$$\dot{X} = F(X)$$

- Les résultats importants concernent les états stationnaires de ces systèmes. Vers quoi convergent les solutions ?

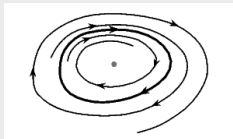
- L'essentiel des idées mathématiques pour expliquer la transition vers la turbulence dans les fluides provient de la théorie des systèmes dynamiques :

$$\dot{X} = F(X)$$

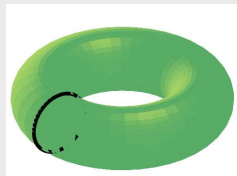
- Les résultats importants concernent les états stationnaires de ces systèmes. Vers quoi convergent les solutions ?
- Jusqu'aux années 1960, on ne connaissait que 3 types d'attracteurs (ensembles limites):



Point fixe (puit)



cycle limite



tore

## TRANSITION VERS LA TURBULENCE

Cymbales et  
Gongs

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

Couplages  
modaux

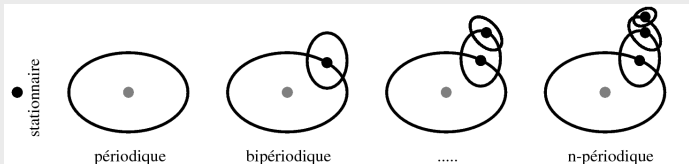
Vibrations  
chaotiques

Chaos temporel et  
turbulence

Transition vers le  
chaos

Conclusion  
générale

- Dans ce contexte, le scénario accepté pour expliquer la transition vers la turbulence était celui de Landau (1944).
- Idée générale : accumulation d'instabilités faisant apparaître de nouvelles fréquences jusqu'à remplir le spectre.  
↔ régime turbulent.



## ATTRACTEUR DE LORENZ

- En 1962, E. Lorenz publie des résultats mettant en évidence un nouveau type d'attracteur. Pour la première fois, on montre qu'un système non-linéaire simple, déterministe, peut produire des comportements apériodiques.
- Le système de Lorenz s'écrit:

$$\dot{X} = P_r(Y - X)$$

$$\dot{Y} = (r - Z)X - Y$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$

Equations obtenues avec une modélisation simplifiée du phénomène de convection thermique.

( $P_r$  : nombre de Prandtl (rapport viscosité/diffusion thermique),  $r$  : écart de température,  $b$  : rapport d'aspect.)

E.N. Lorenz : deterministic non-periodic flow, J. Atmospheric Science, 1962.

## ATTRACTEUR DE LORENZ

- En 1962, E. Lorenz publie des résultats mettant en évidence un nouveau type d'attracteur. Pour la première fois, on montre qu'un système non-linéaire simple, déterministe, peut produire des comportements apériodiques.
- Le système de Lorenz s'écrit:

$$\dot{X} = P_r(Y - X)$$

$$\dot{Y} = (r - Z)X - Y$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$

Equations obtenues avec une modélisation simplifiée du phénomène de convection thermique.

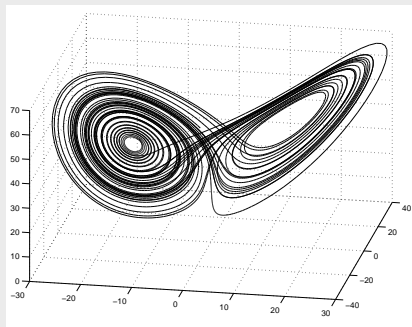
( $P_r$  : nombre de Prandtl (rapport viscosité/diffusion thermique),  $r$  : écart de température,  $b$  : rapport d'aspect.)

E.N. Lorenz : deterministic non-periodic flow, J. Atmospheric Science, 1962.

- En augmentant le paramètre  $r$ , on passe d'un état stable décrit par un point fixe, puis après deux bifurcations on observe un comportement apériodique, *chaotique*.

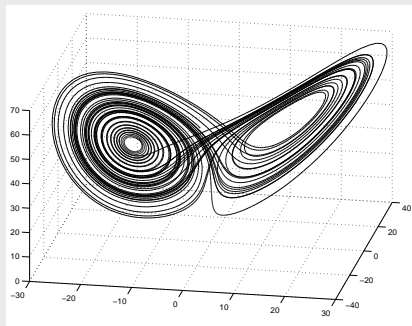
## ATTRACTEUR DE LORENZ

- Le travail de Lorenz est repris par des mathématiciens, en particulier David Ruelle. L'attracteur de Lorenz est qualifié **d'attracteur étrange**.



## ATTRACTEUR DE LORENZ

- Le travail de Lorenz est repris par des mathématiciens, en particulier David Ruelle. L'attracteur de Lorenz est qualifié **d'attracteur étrange**.



- Un attracteur étrange devient la signature d'un comportement chaotique.



# ATTRACTEURS ÉTRANGES

## QUELQUES PROPRIÉTÉS

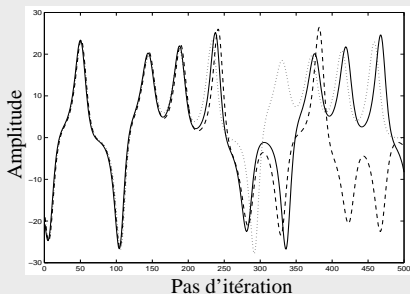
- Les séries temporelles associées sont apériodiques.  
↔ spectre de Fourier **large bande**.

- Les séries temporelles associées sont aperiodiques.

↔ spectre de Fourier **large bande**.

- **sensibilité aux conditions initiales :**

Deux conditions initiales proches d'une quantité  $\varepsilon$  vont donner lieu à deux trajectoires qui vont diverger au bout d'un temps fini.



↔ cette **divergence des trajectoires** est mesurée par la présence d'un exposant de Lyapunov positif.

# ATTRACTEURS ÉTRANGES

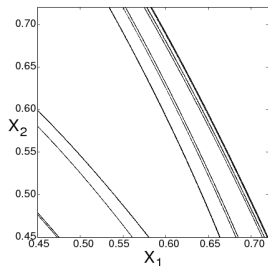
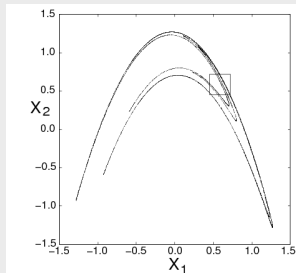
## QUELQUES PROPRIÉTÉS

- Topologie de l'attracteur dans l'espace des phases gouvernée par deux processus opposés:
    - Contraction des volumes dus à la dissipation
    - divergence des trajectoires due à la dynamique chaotique
- ↔ Processus d'étirement/repliement qui est à la base d'une géométrie complexe et **fractale**.

## ATTRACTEURS ÉTRANGES

### QUELQUES PROPRIÉTÉS

- Topologie de l'attracteur dans l'espace des phases gouvernée par deux processus opposés:
  - Contraction des volumes dus à la dissipation
  - divergence des trajectoires due à la dynamique chaotique
- ↔ Processus d'étirement/repliement qui est à la base d'une géométrie complexe et **fractale**.
- Exemple sur l'attracteur de hénou:

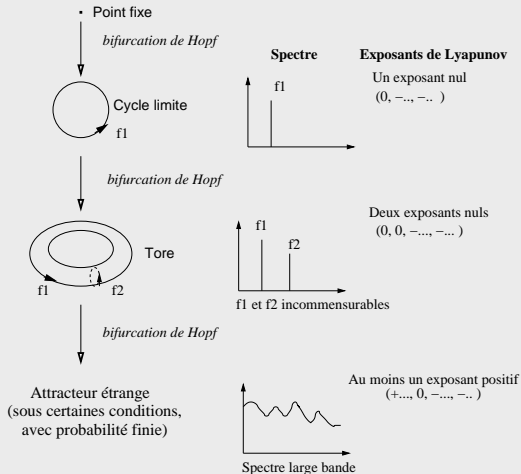


## TRANSITION VERS LE CHAOS

- La découverte des attracteurs étranges donne lieu à une reformulation de la transition vers la turbulence.

D. Ruelle et F. Takens : On the nature of turbulence, Comm. Math. Phys, 1971.

- Scénario de transition de Ruelle-Takens:



# CYMBALES ET GONGS

## TRANSITION VERS LE CHAOS

Cymbales et  
Gongs

Non-linéarité  
géométrique

Tendance de  
non-linéarité

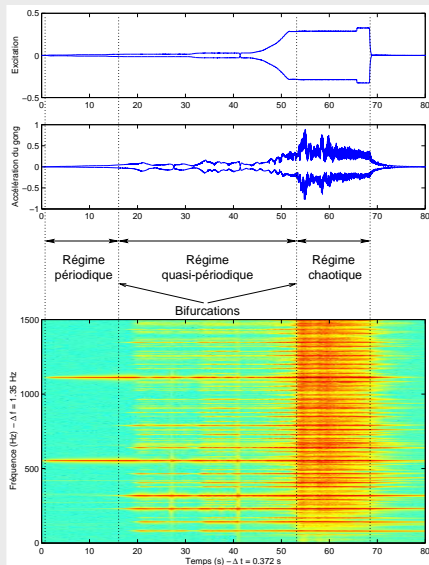
Couplages  
modaux

Vibrations  
chaotiques

Chaos temporel et  
turbulence

Transition vers le  
chaos

Conclusion  
générale



# CYMBALES ET GONGS

## TRANSITION VERS LE CHAOS

- Les observations en régime forcé monofréquentiel peuvent s'expliquer comme une transition vers le chaos selon le scénario de Ruelle-Takens.

# CYMBALES ET GONGS

## TRANSITION VERS LE CHAOS

- Les observations en régime forcé monofréquentiel peuvent s'expliquer comme une transition vers le chaos selon le scénario de Ruelle-Takens.
- En régime impulsionnel:
  - Excitation d'une bande de fréquence.  $\leftrightarrow$  bifurcation rapide vers le régime chaotique.
  - extinction et retour au repos sous l'effet des dissipations.



## CONCLUSION GÉNÉRALE

- Vibrations de grande amplitude de structures minces.  
↪ **Non-linéarités géométriques.**  
Effets visibles dès que  $w \sim h/10$ .  
non-linéarité polynomiale d'ordre 2 et 3.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

- Vibrations de grande amplitude de structures minces.  
↪ **Non-linéarités géométriques.**  
Effets visibles dès que  $w \sim h/10$ .  
non-linéarité polynomiale d'ordre 2 et 3.
- Amplitude modérée, lorsqu'un seul mode est excité:  
**Oscillateur de Duffing.**  
Dépendance des oscillations avec l'amplitude:  
↪ Comportement raidissant ou assouplissant.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

- Vibrations de grande amplitude de structures minces.  
↪ **Non-linéarités géométriques.**  
Effets visibles dès que  $w \sim h/10$ .  
non-linéarité polynomiale d'ordre 2 et 3.
- Amplitude modérée, lorsqu'un seul mode est excité:  
**Oscillateur de Duffing.**  
Dépendance des oscillations avec l'amplitude:  
↪ Comportement raidissant ou assouplissant.
- **Couplages par résonances internes.**  
Les relations de résonance interne :

$$\omega_j = \omega_p \pm \omega_n$$

permettent les échanges d'énergie entre les modes.  
↪ complexification de la dynamique.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

- Vibrations de grande amplitude de structures minces.  
↪ **Non-linéarités géométriques.**

Effets visibles dès que  $w \sim h/10$ .

non-linéarité polynomiale d'ordre 2 et 3.

- Amplitude modérée, lorsqu'un seul mode est excité:  
**Oscillateur de Duffing.**

Dépendance des oscillations avec l'amplitude:

↪ Comportement raidissant ou assouplissant.

- **Couplages par résonances internes.**

Les relations de résonance interne :

$$\omega_j = \omega_p \pm \omega_n$$

permettent les échanges d'énergie entre les modes.

↪ complexification de la dynamique.

- **Vibrations chaotiques.**

- Définition et caractérisation du chaos temporel.
- Lien avec la transition vers la turbulence
- Explication du scénario observé pour les cymbales et les gongs.

# Vibrations non-linéaires de cymbales et de gongs

Cyril Touzé

ENSTA-UME,  
*Unité de recherche en Mécanique,*  
Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées  
cyril.touze@ensta.fr

