

# Modes non-linéaires en théorie des vibrations : Définitions, exemples et applications

Cyril Touzé

ENSTA-UME,  
*Unité de recherche en Mécanique,*  
Chemin de la Hunière  
91761 Palaiseau cedex,  
cyril.touze@ensta.fr

Collaborations : Olivier Thomas (CNAM), Marco Amabili (Universita di Parma),  
Antoine Chaigne (ENSTA-UME).

Journée d'étude SFA/GSAM  
*Non-linéarités et instruments de musique*

# PLAN DE L'EXPOSÉ

## INTRODUCTION

## DÉFINITIONS

- Modes linéaires
- Modes non-linéaires

## MÉTHODES DE CALCUL

- Variété invariante
- Formes normales
- Autres méthodes

## APPLICATIONS

- Réponse forcée de structures minces
- Gongs et Cymbales
- Clarinette

# PLAN DE L'EXPOSÉ

## INTRODUCTION

## DÉFINITIONS

- Modes linéaires
- Modes non-linéaires

## MÉTHODES DE CALCUL

- Variété invariante
- Formes normales
- Autres méthodes

## APPLICATIONS

- Réponse forcée de structures minces
- Gongs et Cymbales
- Clarinette

## CADRE DE L'EXPOSÉ

- ▶ Systèmes vibrants en grande amplitude  
     $\rightsquigarrow$  oscillations non-linéaires,  
    non-linéarités polynômiales.

## CADRE DE L'EXPOSÉ

- ▶ Systèmes vibrants en grande amplitude  
↔ oscillations non-linéaires,  
non-linéarités polynômiales.
- ▶ Forme générique des équations à traiter :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{N}_2(\mathbf{q}, \mathbf{q}) + \mathbf{N}_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{F}(t)$$

où :  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$  (espace des phases de dimension  $N$ ).

$\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  : matrices de masse, amortissement et raideur.

$\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$  : regroupe les termes non-linéaires d'ordre 2 et 3.

N.B. : On peut partir des EDP du système continu

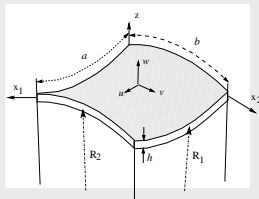
## EXEMPLES (PARMI D'AUTRES...)

### ► Vibrations de grande amplitude de structures minces.

Matériau élastique linéaire + grands déplacements

~> *non-linéarités géométriques*.

Modèles de Von-Karman, Donnell, pour les poutres, plaques, coques,...



## EXEMPLES (PARMI D'AUTRES...)

► **Vibrations de grande amplitude de structures minces.**

Matériau élastique linéaire + grands déplacements

~> *non-linéarités géométriques.*

Modèles de Von-Karman, Donnell, pour les poutres, plaques, coques,...



## EXEMPLES (PARMI D'AUTRES...)

### ▶ Vibrations de grande amplitude de structures minces.

Matériau élastique linéaire + grands déplacements

↔ *non-linéarités géométriques.*

Modèles de Von-Karman, Donnell, pour les poutres, plaques, coques,...

### ▶ Milieu linéaire avec excitation non-linéaire localisée :

exemple des instruments à vent.





# PROBLÉMATIQUE

La prise en compte des termes non-linéaires introduit de nouveaux problèmes :

- ▶ **Au niveau phénoménologique**  
complexité de la dynamique :  
couplages, échanges d'énergie, transition vers le chaos, ...

# PROBLÉMATIQUE

La prise en compte des termes non-linéaires introduit de nouveaux problèmes :

- ▶ **Au niveau phénoménologique**  
complexité de la dynamique :  
couplages, échanges d'énergie, transition vers le chaos, ...
  
- ▶ **Au niveau de la modélisation**  
Problèmes liés à la troncature (choix de  $N$ ).

# PROBLÉMATIQUE

La prise en compte des termes non-linéaires introduit de nouveaux problèmes :

- ▶ **Au niveau phénoménologique**  
complexité de la dynamique :  
couplages, échanges d'énergie, transition vers le chaos, ...
  
- ▶ **Au niveau de la modélisation**  
Problèmes liés à la troncature (choix de  $N$ ).  
↔ Recherche de **modèles réduits** adaptés.

# PROBLÉMATIQUE

- ▶ Modes propres linéaires :
  - ↔ base adaptée au traitement de la dynamique linéaire.
  - oscillateurs découplés
  - Théorème de superposition
  - Invariance.

**Mais** ces propriétés sont perdues au stade non-linéaire.

# PROBLÉMATIQUE

- ▶ Modes propres linéaires :
  - ↔ base adaptée au traitement de la dynamique linéaire.
  - oscillateurs découplés
  - Théorème de superposition
  - Invariance.

**Mais** ces propriétés sont perdues au stade non-linéaire.

- ▶ Modes non-linéaires :
  - Peut-on étendre la notion au régime non-linéaire ?
  - Selon quels critères ?
  - Quelles propriétés peut-on conserver ?

# PLAN DE L'EXPOSÉ

## INTRODUCTION

## DÉFINITIONS

Modes linéaires

Modes non-linéaires

## MÉTHODES DE CALCUL

Variété invariante

Formes normales

Autres méthodes

## APPLICATIONS

Réponse forcée de structures minces

Gongs et Cymbales

Clarinette

## MODES PROPRES : RAPPELS

- ▶ Cas linéaire conservatif :  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$

Modes propres  $\iff$  solutions du problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\phi = 0$$

$\rightsquigarrow$  famille de  $N$  déformées modales  $\phi_i, i=1\dots N$ ;  
et  $N$  pulsations propres  $\omega_i$ .

## MODES PROPRES : RAPPELS

- ▶ Cas linéaire conservatif :  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$   
Modes propres  $\iff$  solutions du problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\phi = 0$$

$\rightsquigarrow$  famille de  $N$  déformées modales  $\phi_i, i=1\dots N$ ;  
et  $N$  pulsations propres  $\omega_i$ .

- ▶ Dans la base modale, la dynamique se réduit à un ensemble **d'oscillateurs découplés**.  
Si  $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]^t = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{q}$  avec  $\mathbf{P}$  la matrice de passage,  
alors  $\forall p = 1\dots N$ :

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p = 0$$



## MODES PROPRES : RAPPELS

- ▶ Cas linéaire conservatif :  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$

Modes propres  $\iff$  solutions du problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\phi = 0$$

$\rightsquigarrow$  famille de  $N$  déformées modales  $\phi_i, i=1\dots N$ ;  
et  $N$  pulsations propres  $\omega_i$ .

- ▶ Dans la base modale, la dynamique se réduit à un ensemble **d'oscillateurs découplés**.

Si  $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]^t = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{q}$  avec  $\mathbf{P}$  la matrice de passage,  
alors  $\forall p = 1\dots N$ :

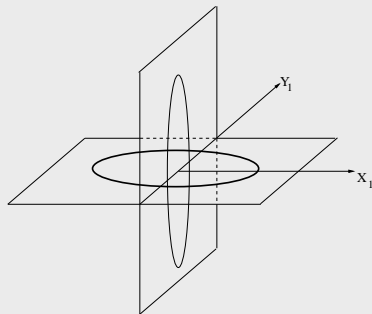
$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p = 0$$

- ▶ Cas linéaire amorti : passage au premier ordre en utilisant la vitesse comme variable supplémentaire.

$\rightsquigarrow$  modes complexes.

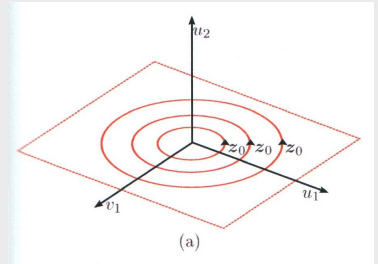
# MODES LINÉAIRES : INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

- ▶ oscillateurs découplés  
↔ espace des phases :  
produit d'hyperplan,  
avec familles d'orbites périodiques.



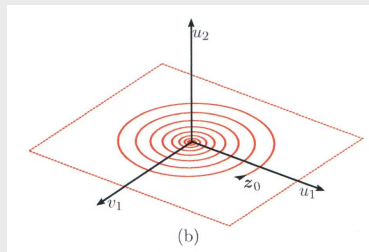
# MODES LINÉAIRES : INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

- ▶ oscillateurs découplés  
↪ espace des phases :  
produit d'hyperplan,  
avec familles d'orbites périodiques.
- ▶ Invariance : pour tout mouvement  
initié selon un seul mode, pas de  
couplage avec les autres modes.



# MODES LINÉAIRES : INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

- ▶ oscillateurs découplés  
↔ espace des phases :  
produit d'hyperplan,  
avec familles d'orbites périodiques.
- ▶ Invariance : pour tout mouvement  
initié selon un seul mode, pas de  
couplage avec les autres modes.
- ▶ Propriété toujours vraie en présence  
d'amortissement.



# RÉGIME NON-LINÉAIRE

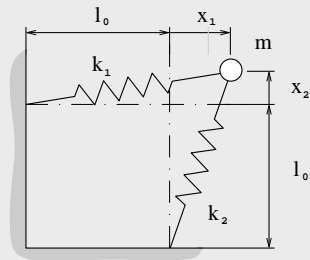
- ▶ Les modes propres peuvent être utilisés au stade non-linéaire afin de rendre diagonale la partie linéaire :

$$\ddot{X}_p + 2\zeta_p\omega_p\dot{X}_p + \omega_p^2 X_p + \sum_{i,j=1}^P g_{ij}^p X_i X_j + \sum_{i,j,k=1}^P h_{ijk}^p X_i X_j X_k = F_p(t)$$

- ▶ Oscillateurs couplés.  
Perte du théorème de superposition.  
Peut-on conserver une propriété des modes linéaires afin de *définir* des modes non-linéaires ?

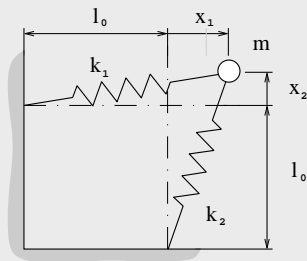
## EXEMPLE : SYSTÈME À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

- Masse connectée à deux ressorts en grands déplacements.



## EXEMPLE : SYSTÈME À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

- ▶ Masse connectée à deux ressorts en grands déplacements.



- ▶ Équation du mouvement :

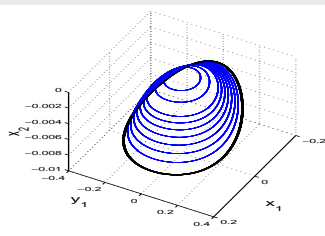
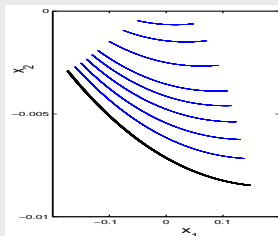
$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + \frac{\omega_1^2}{2} (3X_1^2 + X_2^2) + \omega_2^2 X_1 X_2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} X_1 (X_1^2 + X_2^2) = 0$$

$$\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 + \frac{\omega_2^2}{2} (3X_2^2 + X_1^2) + \omega_1^2 X_1 X_2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} X_2 (X_1^2 + X_2^2) = 0$$

- ▶ Calcul des trajectoires, pour  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1.5$

# MODES NON-LINÉAIRES : DÉFINITIONS ÉQUIVALENTES

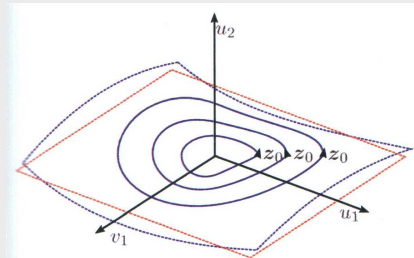
- Familles d'orbites périodiques autour de la position d'équilibre.





# MODES NON-LINÉAIRES : DÉFINITIONS ÉQUIVALENTES

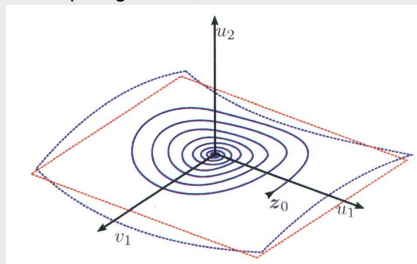
- ▶ Familles d'orbites périodiques autour de la position d'équilibre.
- ▶ **Variété bidimensionnelle invariante, tangente à l'origine au sous-espace propre linéaire associé.**



# MODES NON-LINÉAIRES : DÉFINITIONS ÉQUIVALENTES

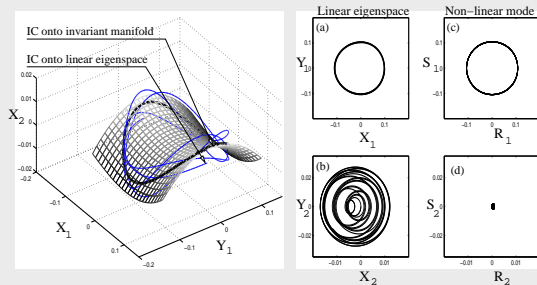
- ▶ Familles d'orbites périodiques autour de la position d'équilibre.
- ▶ **Variété bidimensionnelle invariante, tangente à l'origine au sous-espace propre linéaire associé.**

Définition plus générale, valable dans le cas amorti



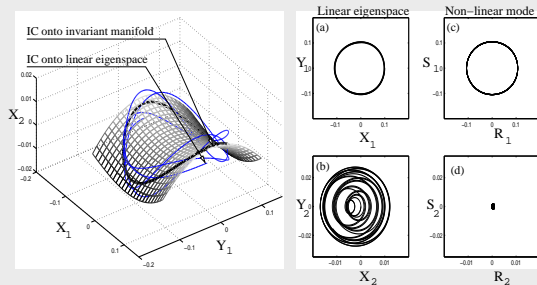
# MODES NON-LINÉAIRES : DÉFINITION

- Conséquence quantitative sur les troncatures :



# MODES NON-LINÉAIRES : DÉFINITION

- ▶ Conséquence quantitative sur les troncatures :



- ▶ Troncature au premier mode :

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + \frac{3\omega_1^2}{2} X_1^2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} X_1^3 = 0$$

↪ on simule des traj. qui n'existent pas dans l'espace des phases complet.

↪ **conséquences qualitatives sur le type de non-linéarité.**

## TYPE DE NON-LINÉARITÉ : DÉFINITION

- Pour un oscillateur non-linéaire :

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + g_{pp}^p X_p^2 + h_{ppp}^p X_p^3 = 0$$

Dépendance de la fréquence des oscillations libres avec l'amplitude selon :  $\omega_{NL} = \omega_p(1 + \tilde{\Gamma}_p a^2)$ , avec :

$$\tilde{\Gamma}_p = \frac{1}{8\omega_p^2} \left( 3h_{ppp}^p - \frac{10g_{pp}^p}{3\omega_p^2} \right).$$

## TYPE DE NON-LINÉARITÉ : DÉFINITION

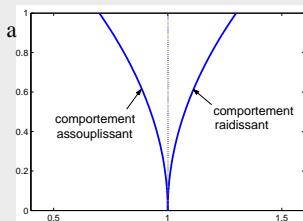
- Pour un oscillateur non-linéaire :

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + g_{pp}^p X_p^2 + h_{ppp}^p X_p^3 = 0$$

Dépendance de la fréquence des oscillations libres avec l'amplitude selon :  $\omega_{NL} = \omega_p(1 + \tilde{\Gamma}_p a^2)$ , avec :

$$\tilde{\Gamma}_p = \frac{1}{8\omega_p^2} \left( 3h_{ppp}^p - \frac{10g_{pp}^p}{3\omega_p^2} \right).$$

- Si  $\tilde{\Gamma}_p > 0$ , comportement raidissant.
- Si  $\tilde{\Gamma}_p < 0$ , comportement assouplissant.



## TYPE DE NON-LINÉARITÉ : PRÉDICTION

- ▶ Lorsqu'on a  $N$  oscillateurs : pas de formule analytique simple.
- ▶ Réduction à un mode linéaire  $\rightsquigarrow$  prédictions erronées.

## TYPE DE NON-LINÉARITÉ : PRÉDICTION

- ▶ Lorsqu'on a  $N$  oscillateurs : pas de formule analytique simple.
- ▶ Réduction à un mode linéaire  $\rightsquigarrow$  prédictions erronées.
- ▶ Réduction à un mode non-linéaire  $\rightsquigarrow$  bonne prédiction.  
Exemple sur le système à deux ddl :

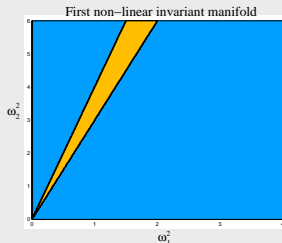
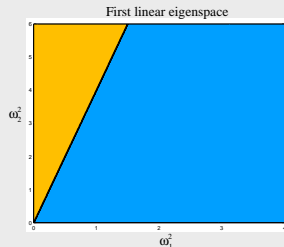


## TYPE DE NON-LINÉARITÉ : PRÉDICTION

- ▶ Lorsqu'on a  $N$  oscillateurs : pas de formule analytique simple.
  - ▶ Réduction à un mode linéaire  $\rightsquigarrow$  prédictions erronées.
  - ▶ Réduction à un mode non-linéaire  $\rightsquigarrow$  bonne prédiction.
- Exemple sur le système à deux ddl :

$$\tilde{\Gamma}_1 = -\frac{3}{4} + \frac{3\omega_2^2}{16\omega_1^2}$$

$$\Gamma_1 = -\frac{3}{4} + \frac{3\omega_2^2}{16\omega_1^2} + \frac{\omega_2^2(8\omega_1^2 - 3\omega_2^2)}{16\omega_1^2(\omega_2^2 - 4\omega_1^2)}$$



Jaune :  $\Gamma > 0$  : comportement raidissant, bleu  $\Gamma < 0$  : comportement assouplissant.

## MODES NON-LINÉAIRES : PREMIER BILAN

- ▶ **Définition** : variété invariante de l'espace des phases, tangente à l'origine au sous-espace propre associé.
- ▶ Dynamique sur la variété : gouvernée par une seule équation d'oscillateur.  
↔ **Modèles d'ordre réduits**
- ▶ Permet de prédire correctement le type de non-linéarité.

# PLAN DE L'EXPOSÉ

## INTRODUCTION

## DÉFINITIONS

Modes linéaires

Modes non-linéaires

## MÉTHODES DE CALCUL

Variété invariante

Formes normales

Autres méthodes

## APPLICATIONS

Réponse forcée de structures minces

Gongs et Cymbales

Clarinette

## VARIÉTÉ INVARIANTE

- ▶ Méthode proposée par S. Shaw et C. Pierre (JSV, 1991-1993).
- ▶ Utilise la technique de calcul proposée dans le théorème de la variété centrale.

## VARIÉTÉ INVARIANTE

- ▶ Méthode proposée par S. Shaw et C. Pierre (JSV, 1991-1993).
- ▶ Utilise la technique de calcul proposée dans le théorème de la variété centrale.
- ▶ Point de départ :  $\forall i = 1 \dots N$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= y_i \\ \dot{y}_i &= f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases}$$

## VARIÉTÉ INVARIANTE

- ▶ Méthode proposée par S. Shaw et C. Pierre (JSV, 1991-1993).
- ▶ Utilise la technique de calcul proposée dans le théorème de la variété centrale.
- ▶ Point de départ :  $\forall i = 1 \dots N$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= y_i \\ \dot{y}_i &= f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases}$$

- ▶ Mouvement selon un mode non-linéaire  $\iff$  on peut exprimer toutes les coordonnées en fonction d'une seule paire, soit  $(x_1, y_1)$  par exemple. Donc :

$$\forall i \geq 2 \dots N : \begin{cases} x_i &= X_i(x_1, y_1) \\ y_i &= Y_i(x_1, y_1) \end{cases}$$

- ▶  $2(N - 1)$  inconnues : fonctions  $X_i(x_1, y_1)$ ,  $Y_i(x_1, y_1)$ .

# VARIÉTÉ INVARIANTE

- ▶ Idée : éliminer la variable temps pour avoir l'équation définissant la géométrie de la variété dans l'espace des phases.  $\forall i \geq 2 \dots N$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial X_i}{\partial y_1} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_i &= \frac{\partial Y_i}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial Y_i}{\partial y_1} \dot{y}_1 \end{cases}$$

## VARIÉTÉ INVARIANTE

- ▶ Idée : éliminer la variable temps pour avoir l'équation définissant la géométrie de la variété dans l'espace des phases.  $\forall i \geq 2 \dots N$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial X_i}{\partial y_1} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_i &= \frac{\partial Y_i}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial Y_i}{\partial y_1} \dot{y}_1 \end{cases}$$

- ▶ En remplaçant :

$$\begin{cases} Y_i &= \frac{\partial X_i}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial X_i}{\partial y_1} f_1(x_1, y_1) \\ f_i(x_1, y_1) &= \frac{\partial Y_i}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial Y_i}{\partial y_1} f_1(x_1, y_1) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$  équations de la variété de dimension 2 dans l'espace des phases de dimension  $2N$ .



# VARIÉTÉ INVARIANTE

- ▶ Une fois obtenues les équations géométriques, la dynamique sur la variété s'exprime selon :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = f_1(x_1, X_1(x_1, y_1), \dots, y_1, \dots, Y_N(x_1, y_1)) \end{cases}$$

## VARIÉTÉ INVARIANTE

- ▶ Une fois obtenues les équations géométriques, la dynamique sur la variété s'exprime selon :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = f_1(x_1, X_1(x_1, y_1), \dots, y_1, \dots, Y_N(x_1, y_1)) \end{cases}$$

- ▶ **Mais** : Équations de la variété contiennent toutes les non-linéarités du problème initial.  
↪ difficile à résoudre.

## VARIÉTÉ INVARIANTE

- ▶ Une fois obtenues les équations géométriques, la dynamique sur la variété s'exprime selon :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = f_1(x_1, X_1(x_1, y_1), \dots, y_1, \dots, Y_N(x_1, y_1)) \end{cases}$$

- ▶ **Mais** : Équations de la variété contiennent toutes les non-linéarités du problème initial.

↪ difficile à résoudre.

- ▶ Développement asymptotique :

$$\forall i \geq 2 \dots N : \begin{cases} X_i(x_1, y_1) = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}y_1 + a_{i,3}x_1^2 + a_{i,4}x_1y_1 + \dots \\ Y_i(x_1, y_1) = b_{i,1}x_1 + b_{i,2}y_1 + b_{i,3}x_1^2 + b_{i,4}x_1y_1 + \dots \end{cases}$$

# VARIÉTÉ INVARIANTE

- ▶ Une fois obtenues les équations géométriques, la dynamique sur la variété s'exprime selon :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = f_1(x_1, X_1(x_1, y_1), \dots, y_1, \dots, Y_N(x_1, y_1)) \end{cases}$$

- ▶ **Mais** : Équations de la variété contiennent toutes les non-linéarités du problème initial.

↪ difficile à résoudre.

- ▶ Développement asymptotique :

$$\forall i \geq 2 \dots N : \begin{cases} X_i(x_1, y_1) = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}y_1 + a_{i,3}x_1^2 + a_{i,4}x_1y_1 + \dots \\ Y_i(x_1, y_1) = b_{i,1}x_1 + b_{i,2}y_1 + b_{i,3}x_1^2 + b_{i,4}x_1y_1 + \dots \end{cases}$$

- ▶ Résolution numérique.

# VARIÉTÉ INVARIANTE

## ▶ Avantages

- ▶ Formulation très générale.  
(ajout d'amortissement, de termes gyroscopiques, voire même de non-linéarité non-régulière, ...).
- ▶ Se prête bien à un calcul numérique. [Pesheck, Jiang, Shaw et Pierre, 2002-2006]

## ▶ Inconvénients

- ▶ Une seule variété calculée.  
↪ refaire le calcul pour une autre.
- ▶ Dans les cas où le mouvement réduit est compris dans une sous-variété de dimension 2, 4 ou 6...  
↪ la formulation se complexifie.

## FORMES NORMALES : RAPPEL

- ▶ Théorème de Poincaré : Soit  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{N}(\mathbf{X})$ .  
Soient  $\{s_k\}_{k=1\dots N}$  les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ .  
S'il n'existe aucune relation de résonance entre les v.p. de  $\mathbf{A}$ ,  
alors il existe un changement de variables  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} + h(\mathbf{Y})$  t.q. :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$$

- ▶ Relation de résonance : Toute relation de la forme :

$$s_k = \sum_{i=1}^N n_i s_i, \quad n_i \geq 0, \quad \sum_i n_i = p \geq 2$$

où  $p$  est l'ordre de la non-linéarité.

*Exemples* :  $s_1 = 2s_2$ , résonance d'ordre deux ;

$s_2 = s_1 + 2s_3$ , résonance d'ordre trois.

## FORMES NORMALES : RAPPEL

- ▶ Théorème de Poincaré-Dulac : Le changement de variable  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} + h(\mathbf{Y})$  permet d'éliminer tous les monômes non-résonnants.

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \sum_n A_n(\mathbf{Y})$$

## FORMES NORMALES : RAPPEL

- ▶ Théorème de Poincaré-Dulac : Le changement de variable  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} + h(\mathbf{Y})$  permet d'éliminer tous les monômes non-résonnants.

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \sum_n A_n(\mathbf{Y})$$

- ▶ Changement de variables non-linéaires  
↪ forme "la plus simple" possible de la dynamique.
- ▶ Calcul de la fonction  $h$  (et preuve du théorème) :  
par développements asymptotiques, et de manière récursive sur les ordres  $p$  de la non-linéarité.



# MODES NON-LINÉAIRES ET FORMES NORMALES

- ▶ Au stade conservatif : spectre linéaire en  $\{\pm i\omega_p\}$ 
  - ↪ relation de résonances d'ordre 3 triviales.
  - ↪ On ne pourra pas linéariser complètement le système.

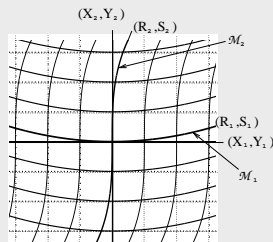
# MODES NON-LINÉAIRES ET FORMES NORMALES

- ▶ Au stade conservatif : spectre linéaire en  $\{\pm i\omega_p\}$ 
  - ↪ relation de résonances d'ordre 3 triviales.
  - ↪ On ne pourra pas linéariser complètement le système.

▶ Changement de coordonnées non-linéaire:

$$\begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_p \\ S_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_p^{(3)}(R_i, S_i) \\ Q_p^{(3)}(R_i, S_i) \end{pmatrix}$$

$(R_p, S_p)$ : nouvelles coordonnées, reliés aux MNL.



# MODES NON-LINÉAIRES ET FORMES NORMALES

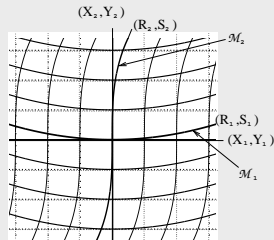
- ▶ Au stade conservatif : spectre linéaire en  $\{\pm i\omega_p\}$ 
  - ↪ relation de résonances d'ordre 3 triviales.
  - ↪ On ne pourra pas linéariser complètement le système.

▶ Changement de coordonnées non-linéaire:

$$\begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_p \\ S_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_p^{(3)}(R_i, S_i) \\ Q_p^{(3)}(R_i, S_i) \end{pmatrix}$$

$(R_p, S_p)$ : nouvelles coordonnées, reliés aux MNL.

- ▶ Dynamique exprimée en  $(R_p, S_p)$  :
  - ↪ espace des phases engendré par les MNL.

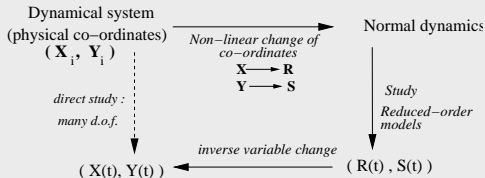


[C. Touzé, O. Thomas et A. Chaigne, JSV, 2004]

# MNL ET FORMES NORMALES

## ► Avantages

- Tous les modes non-linéaires sont calculés en une seule opération.
- cadre adapté à l'analyse/synthèse non-linéaire :



- Ajout d'amortissement (perturbation du problème linéaire) possible.

[C. Touzé et M. Amabili, JSV, 2006]

## ► Inconvénients

- Calcul par développement asymptotique  
 ~> validité limitée en amplitude
- Ne se prête pas à un calcul numérique.

## FORMULATION AMPLITUDE-PHASE

- ▶ Définition du mode non-linéaire comme solutions périodiques dépendant explicitement de l'amplitude [S. Bellizzi et R. Bouc, JSV, 2006] :

$$\mathbf{X}(t) = a \underline{\Psi}(a, \phi(t)) \cos \phi(t)$$

$$\dot{\phi}(t) = \Omega(a, \phi(t))$$

$$\phi(0) = \Phi_0$$

où  $\underline{\Psi}$  représente la déformée modale non-linéaire,  $\Omega$  la pulsation instantanée.

- ▶ Conduit à une extension du problème aux valeurs propres classiques, contenant les non-linéarités du problème initial.

## FORMULATION AMPLITUDE-PHASE

- ▶ Définition du mode non-linéaire comme solutions périodiques dépendant explicitement de l'amplitude [S. Bellizzi et R. Bouc, JSV, 2006] :

$$\mathbf{X}(t) = a \underline{\Psi}(a, \phi(t)) \cos \phi(t)$$

$$\dot{\phi}(t) = \Omega(a, \phi(t))$$

$$\phi(0) = \Phi_0$$

où  $\underline{\Psi}$  représente la déformée modale non-linéaire,  $\Omega$  la pulsation instantanée.

- ▶ Conduit à une extension du problème aux valeurs propres classiques, contenant les non-linéarités du problème initial.
- ▶ Méthode ayant des points communs avec la technique de la variété invariante.
- ▶ se prête bien à un calcul numérique.

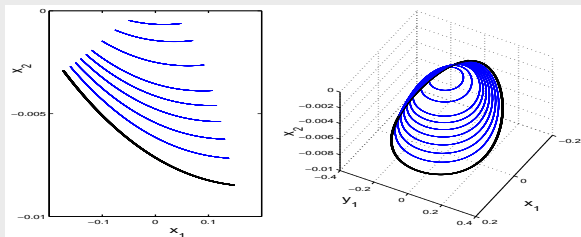
## CONTINUATION D'ORBITES PÉRIODIQUES

- ▶ Utilise la définition d'un MNL comme famille d'orbites périodiques
- ▶ Proche de l'origine, les orbites sont contenues dans les plans modaux.

## CONTINUATION D'ORBITES PÉRIODIQUES

- ▶ Utilise la définition d'un MNL comme famille d'orbites périodiques
- ▶ Proche de l'origine, les orbites sont contenues dans les plans modaux.
- ▶ Par des méthodes numériques de continuation, on peut obtenir toute la famille.

[R. Arquier, B. Cochelin, S. Bellizzi et R. Bouc, Computers and Structures, 2006]





# PLAN DE L'EXPOSÉ

## INTRODUCTION

## DÉFINITIONS

Modes linéaires

Modes non-linéaires

## MÉTHODES DE CALCUL

Variété invariante

Formes normales

Autres méthodes

## APPLICATIONS

Réponse forcée de structures minces

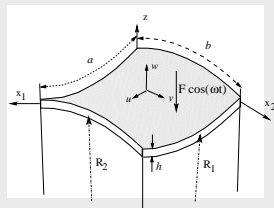
Gongs et Cymbales

Clarinette

## VIBRATIONS DE COQUES MINCES

- ▶ Structure mince, grands déplacements  
↪ non-linéarités géométriques.
- ▶ Exemple choisi : réponse forcée d'une coque, au voisinage de la première fréquence propre.

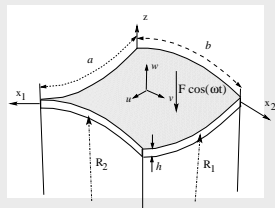
[C. Touzé, M. Amabili et O. Thomas, CMAME, 2008]



## VIBRATIONS DE COQUES MINCES

- ▶ Structure mince, grands déplacements  
 ~> non-linéarités géométriques.
- ▶ Exemple choisi : réponse forcée d'une coque, au voisinage de la première fréquence propre.

[C. Touzé, M. Amabili et O. Thomas, CMAME, 2008]



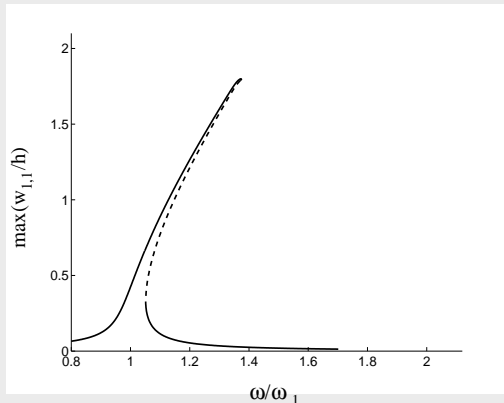
- ▶ Équations du mouvement (projetées sur les modes propres):

$$\ddot{X}_p + 2\zeta_p\omega_p\dot{X}_p + \omega_p^2 X_p + \sum_{i,j=1}^P g_{ij}^p X_i X_j + \sum_{i,j,k=1}^P h_{ijk}^p X_i X_j X_k = F_p \cos(\omega t)$$

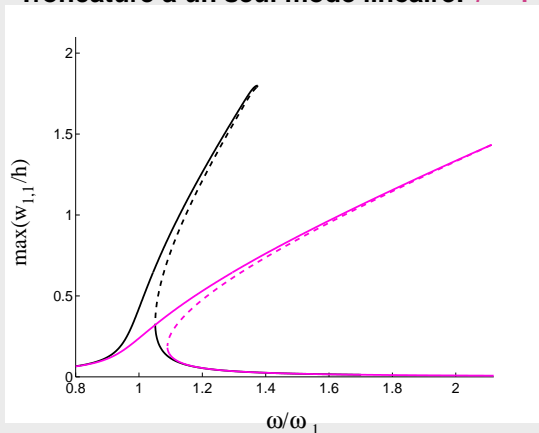
- ▶ Dimensions :  $a = b = 0.1$  m,  $R_x = -R_y = 1$  m,  $h = 1$  mm.  
 matériau élastique linéaire,  $E = 206 \cdot 10^9$  Pa,  $\rho = 7800$  kg.m<sup>-3</sup>,  $\nu = 0.3$ .
- ▶ Amplitude du forçage :  $\tilde{f} = 4.37$  N.

## VIBRATIONS DE COQUES MINCES

- Solution de référence obtenue pour  $P = 18$  modes linéaires.



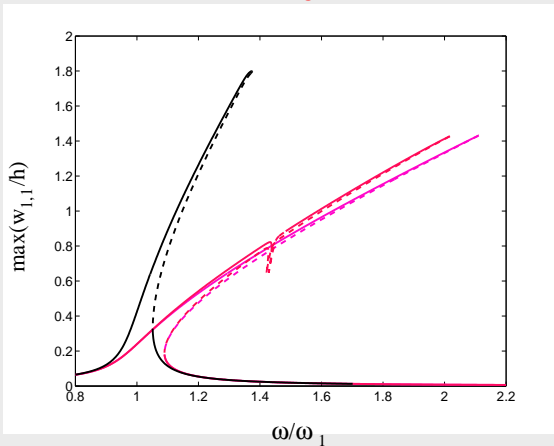
## Troncature à un seul mode linéaire: $P = 1$



$$\ddot{X}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 + g_{11}^1 X_1^2 + h_{111}^1 X_1^3 = F_1 \cos(\omega t)$$

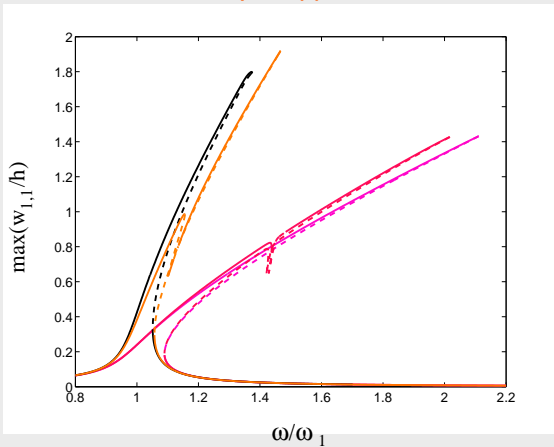
## Convergence linéaire : Augmentation de $P$

$P = 5$



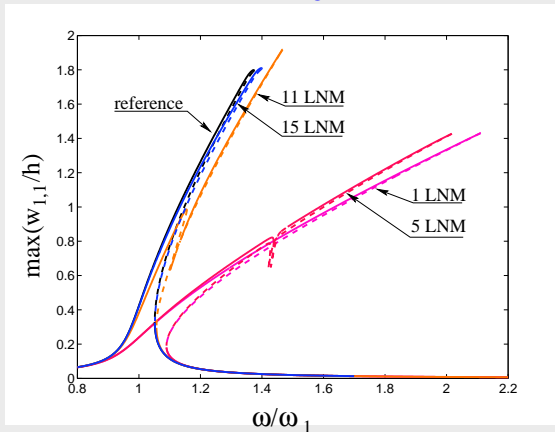
## Convergence linéaire : Augmentation de $P$

$P = 11$



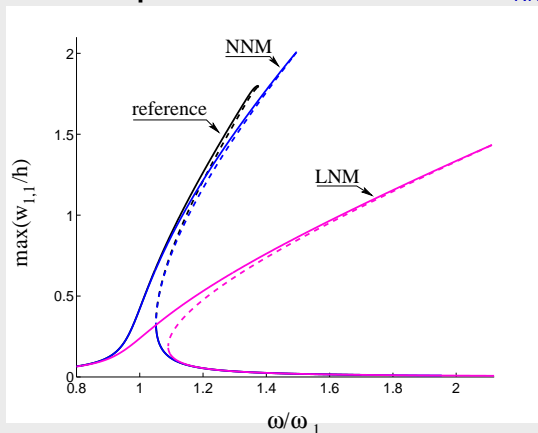
## Convergence linéaire : Augmentation de $P$

$$P = 15$$



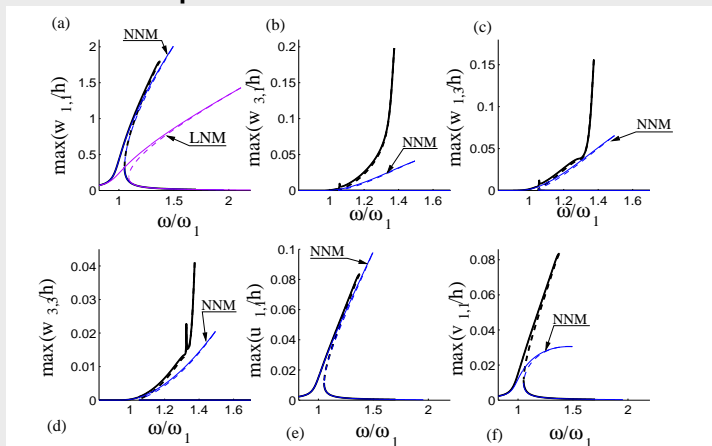


## Troncature au premier mode non-linéaire : $P_{NNM} = 1$



$$\ddot{R}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{R}_1 + \omega_1^2 R_1 + (h_{111}^1 + A_{111}^1) R_1^3 + B_{111}^1 R_1 \dot{R}_1^2 + C_{111}^1 R_1^2 \dot{R}_1 = F_1 \cos(\omega t)$$

## Comparaison des autres coordonnées

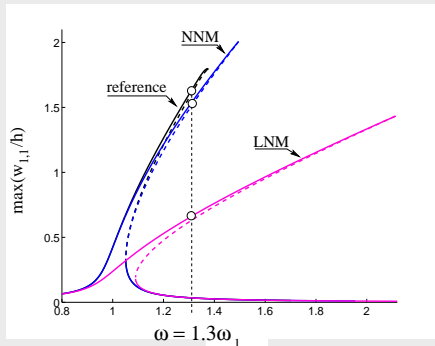


## Réponse temporelle:

- ▶ intégration directe des équations du mouvement

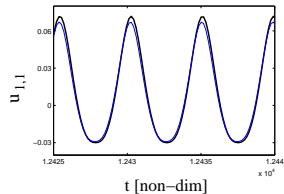
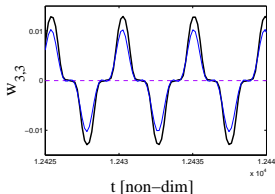
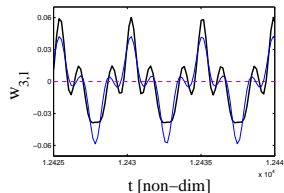
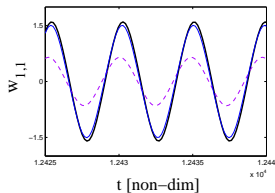
- ▶  $\tilde{f} = 4.37 \text{ N}$   
 $\omega = 1.3\omega_1$

- ▶ comparaison des coordonnées principales:  
 $w_{1,1}$ ,  $w_{3,1}$ ,  $w_{3,3}$ , and  $u_{1,1}$

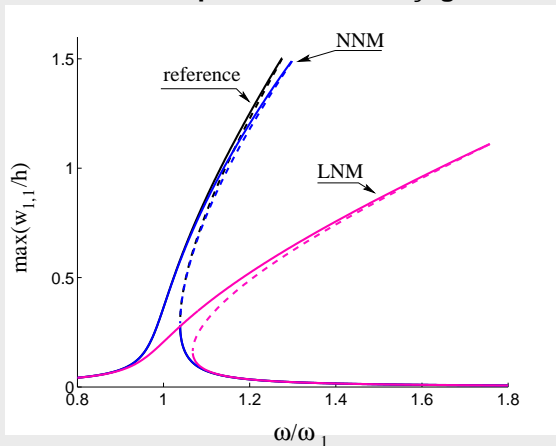


## Réponse temporelle

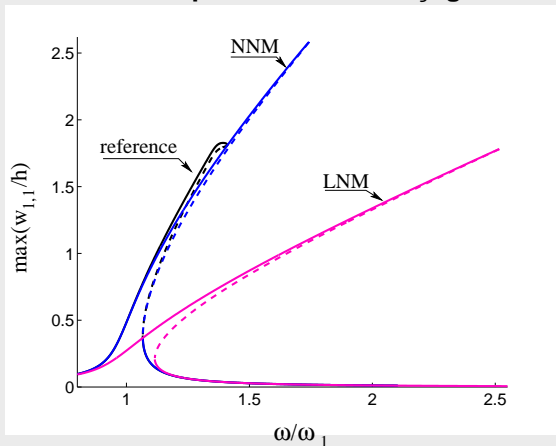
Comparaison des coordonnées principales:



Pour une valeur plus faible du forçage : 2.84 N



Pour une valeur plus élevée du forçage : 6.66 N

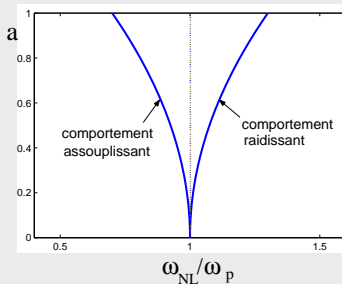


## VIBRATIONS FORCÉES : CONCLUSION

- ▶ Réduction importante de la dynamique :  
1 seul mode non-linéaire contre 18 modes linéaires.
- ▶ gain substantiel en temps de calcul :  
un facteur 25 entre les simulations 1 NNM et 18 modes linéaires.
- ▶ Légère perte de précision à cause du développement asymptotique.

# GONGS ET CYMBALES

- ▶ Comportement typique des gongs épais : glissements de fréquences. [Fletcher et Rossing, 1986]
- ▶ Relié à la variation des fréquences avec l'amplitude.

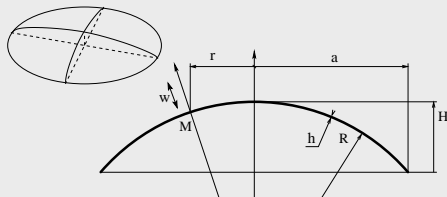


- ▶ Pour une bonne prédiction du glissement de fréquence:  
↪ utiliser les modes non-linéaires.



## GONGS ET CYMBALES

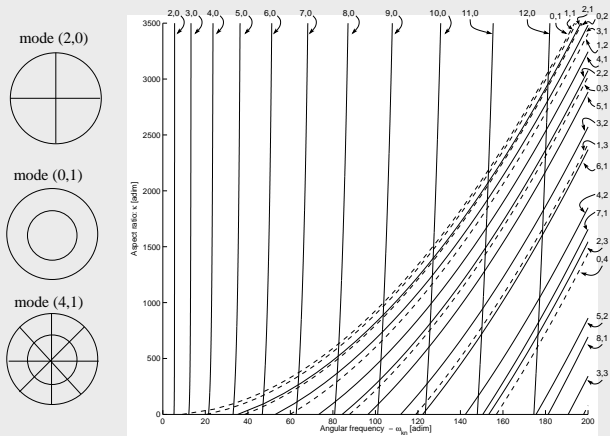
- ▶ Coque mince de rayon de courbure  $R$ , d'épaisseur  $h$ , de diamètre  $2a$ .
- ▶ Etude paramétrique du type de non-linéarité en fonction de la courbure  $R$ .



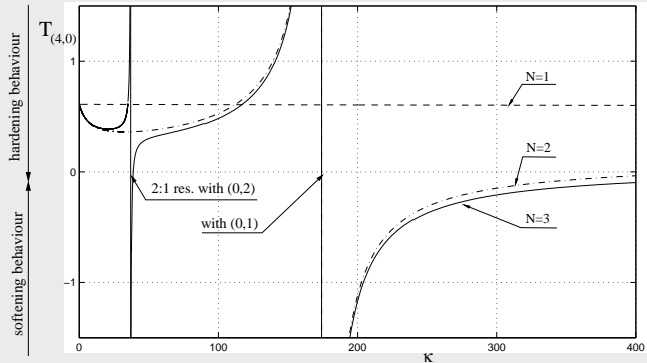
- ▶ Plus précisément on montre que le paramètre géométrique pertinent (rapport d'aspect de la coque sphérique) est :

$$\kappa = \frac{a^4}{R^2 h^2}$$

► Coque sphérique : variation des fréquences :



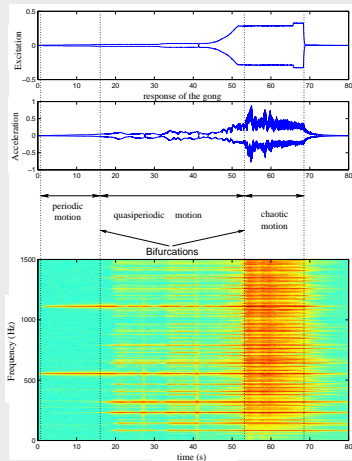
► Variation du type de non-linéarité pour le mode (4,0)



[C. Touzé et O. Thomas, Int. J. Non-linear Mech., 2006]

# GONGS ET CYMBALES

- ▶ Transition vers le chaos:  
↪ MNLs bon candidats pour modèle réduit pouvant reproduire ces dynamiques.
- ▶ Cependant : dimension de la variété assez grande (pour l'exemple montré, au moins 7 modes non-linéaires)
- ▶ Encore des difficultés numériques.



# CLARINETTE

- ▶ **Modèle de Clarinette :**  
résonateur linéaire (tuyau ouvert/fermé)  
+ excitation non-linéaire (anche).

[V. Debut et J. Kergomard, 2004]

# CLARINETTE

- ▶ **Modèle de Clarinette :**  
résonateur linéaire (tuyau ouvert/fermé)  
+ excitation non-linéaire (anche).

[V. Debut et J. Kergomard, 2004]

- ▶ **Relation débit d'air entrant/pression acoustique :**

$$\bar{u} = \zeta(1 + \bar{p} - \gamma)\sqrt{\gamma - \bar{p}}$$

- $\bar{u}$  : débit d'air entrant (adimensionné).
- $\bar{p}$  : pression acoustique imposée par le résonateur sur  $\bar{u}$ .
- $\gamma$  : pression de jeu (imposée par l'instrumentiste).
- $\zeta$  : paramètre géométrique (anche).

# CLARINETTE

- ▶ **Modèle de Clarinette :**  
résonateur linéaire (tuyau ouvert/fermé)  
+ excitation non-linéaire (anche).

[V. Debut et J. Kergomard, 2004]

- ▶ **Relation débit d'air entrant/pression acoustique :**

$$\bar{u} = \zeta(1 + \bar{p} - \gamma)\sqrt{\gamma - \bar{p}}$$

- $\bar{u}$  : débit d'air entrant (adimensionné).
  - $\bar{p}$  : pression acoustique imposée par le résonateur sur  $\bar{u}$ .
  - $\gamma$  : pression de jeu (imposée par l'instrumentiste).
  - $\zeta$  : paramètre géométrique (anche).
- ▶ **Approximation à l'ordre 3 :**

$$\bar{u} = u_0 + A\bar{p} + B\bar{p}^2 + C\bar{p}^3$$

# CLARINETTE

- ▶ Pression acoustique à l'intérieur du résonateur :

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} = F(x, t)$$

avec  $F(x, t) = \frac{\rho}{S} \delta(x) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$   
source dû au débit d'air entrant.

- ▶ Conditions aux limites : tuyau ouvert-fermé:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= 0 \quad \text{en } x = 0 \\ p(x) &= 0 \quad \text{en } x = L \end{aligned}$$



# CLARINETTE

- ▶ On projette l'inconnue  $\bar{p}$  sur les modes propres du tuyau ouvert/fermé :

$$\bar{p}(x, t) = \sum_{n=1}^N p_n(t) \cos \frac{n\pi x}{2l}$$

- ▶ On utilise la relation qui relie  $\bar{u}$  et  $\bar{p}$  pour obtenir :

$$\ddot{p}_n + 2\mu_n \dot{p}_n + \omega_n^2 p_n = \frac{2c}{l} \left( A + 2B \sum_{i=1}^N p_i(t) + 3C \left( \sum_{i=1}^N p_i(t) \right)^2 \right) \sum_{i=1}^N \dot{p}_i(t)$$

# CLARINETTE

- ▶ Réduction à un mode : équation de type Van der Pol pour le mode  $n$  :

$$\ddot{p}_n + \left(2\mu_n + \frac{2c}{I}(A + 2Bp_n + 3Cp_n^2)\right)\dot{p}_n + \omega_n^2 p_n = 0$$

- ↪ création d'un cycle limite stable par bifurcation de Hopf pour une valeur critique de la pression de jeu  $\gamma$ .
- ↪ auto-oscillations.

# CLARINETTE

- ▶ Réduction à un mode : équation de type Van der Pol pour le mode  $n$  :

$$\ddot{p}_n + \left(2\mu_n + \frac{2c}{I}(A + 2Bp_n + 3Cp_n^2)\right)\dot{p}_n + \omega_n^2 p_n = 0$$

↔ création d'un cycle limite stable par bifurcation de Hopf pour une valeur critique de la pression de jeu  $\gamma$ .  
↔ auto-oscillations.

- ▶ Pour simuler la dynamique complète à N modes couplés :  
↔ utilisation des MNL comme modèle réduit.

# MODES NON-LINÉAIRES POUR LA CLARINETTE

- ▶ Calcul du premier mode non-linéaire pour  $\gamma = 0.39$  (2 premiers modes linéairement instables).
- ▶ Technique de calcul : formulation amplitude-phase, à partir d'une projection pour  $N=3$ .

[D. Noreland, S. Bellizzi, C. Vergez and R. Bouc, 2007]

# MODES NON-LINÉAIRES POUR LA CLARINETTE

- ▶ Calcul du premier mode non-linéaire pour  $\gamma = 0.39$  (2 premiers modes linéairement instables).
- ▶ Technique de calcul : formulation amplitude-phase, à partir d'une projection pour  $N=3$ .

[D. Noreland, S. Bellizzi, C. Vergez and R. Bouc, 2007]

- ▶ Le vecteur  $\mathbf{P} = [p_1 \ p_2 \ p_3]^t$  est transformé selon :

$$\mathbf{P}(t) = v(t)\mathbf{X}(v(t), \phi(t))$$

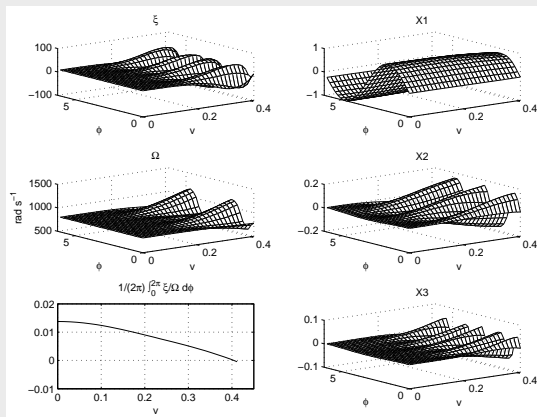
Et la dynamique est donnée en résolvant :

$$\dot{v}(t) = v(t)\xi(v(t), \phi(t))$$

$$\dot{\phi}(t) = \Omega(v(t), \phi(t))$$

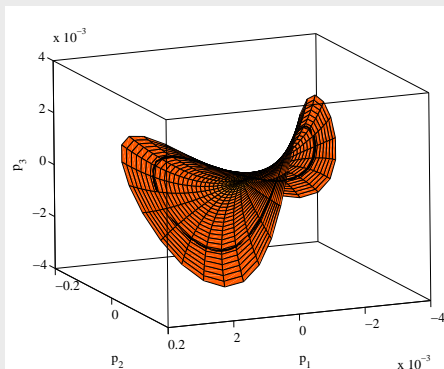
# MODES NON-LINÉAIRES POUR LA CLARINETTE

- Résolution numérique pour le premier mode non-linéaire :



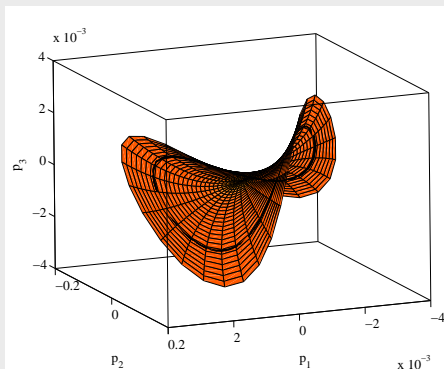
# MODES NON-LINÉAIRES POUR LA CLARINETTE

- ▶ Cycle limite dans l'espace  $(p_1, p_2, p_3)$  :



## MODES NON-LINÉAIRES POUR LA CLARINETTE

- ▶ Cycle limite dans l'espace  $(p_1, p_2, p_3)$  :



- ▶ Formulation permet de retrouver des composantes pour toutes les coordonnées en simulant une dynamique à un degré de liberté.



# MODES NON-LINÉAIRES POUR LA CLARINETTE

## ▶ Avantages

- ▶ Dynamique simple (1 seul oscillateur)
- ▶ calcul direct des transitoires, de la période d'oscillations.

## ▶ Inconvénients

- ▶ Technique numérique couteuse.
- ▶ Calcul des variétés à refaire en changeant les paramètres de jeu.  
↪ extensions à la synthèse sonore pas évidente.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

- ▶ Mode non-linéaire : variété invariante de l'espace des phases.  
↔ en fait a priori les meilleurs modèles réduits possibles.
- ▶ plusieurs méthodes de calcul (plus ou moins précises et coûteuses).

## CONCLUSION GÉNÉRALE

- ▶ Mode non-linéaire : variété invariante de l'espace des phases.  
↪ en fait a priori les meilleurs modèles réduits possibles.
- ▶ plusieurs méthodes de calcul (plus ou moins précises et coûteuses).
- ▶ Applications :
  - ▶ vibrations forcées (structures minces).  
↪ prédiction de la tendance de non-linéarité  
↪ diagramme de bifurcation à moindre coût
  - ▶ Systèmes d'oscillateur type Van der Pol (clarinette)  
↪ calcul efficace de la période et de la dynamique.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

- ▶ Mode non-linéaire : variété invariante de l'espace des phases.  
↪ en fait a priori les meilleurs modèles réduits possibles.
- ▶ plusieurs méthodes de calcul (plus ou moins précises et coûteuses).
- ▶ Applications :
  - ▶ vibrations forcées (structures minces).  
↪ prédiction de la tendance de non-linéarité  
↪ diagramme de bifurcation à moindre coût
  - ▶ Systèmes d'oscillateur type Van der Pol (clarinette)  
↪ calcul efficace de la période et de la dynamique.
- ▶ Application synthèse sonore pour bientôt ?